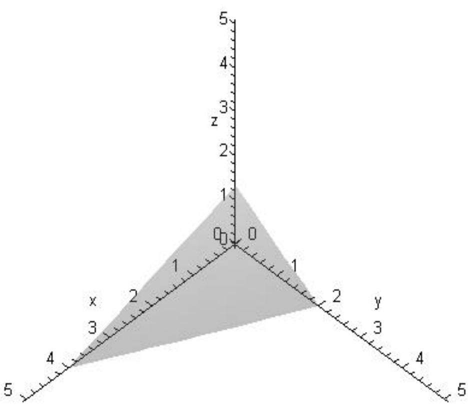
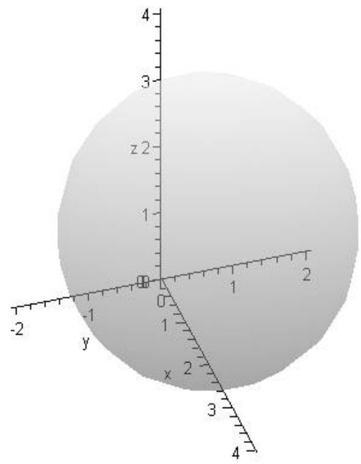
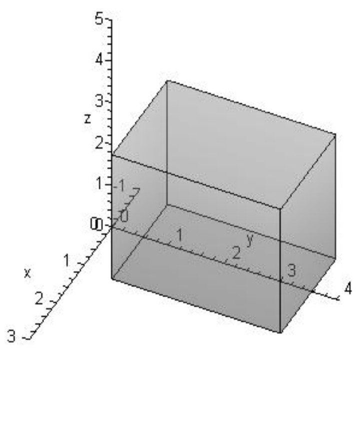
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Vektorianalyysi
Harjoitus 1
Mallit (HL)

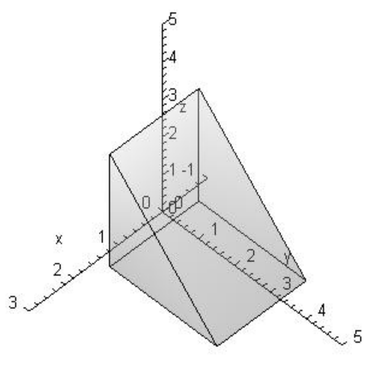
Tehtävä 1. *Tehtävän a-kohdan kuva on alhaalla vasemmalla ja b-kohdan oikealla. Tehtävän a-kohdassa vastaukseen kuuluu alla olevan tason ja tasojen* $x = 0, y = 0$ *ja* $z = 0$ *rajaama alue. Kummassakaan kohdassa kuvioiden reuna ei kuulu vastausjoukkoon.*





Tehtävä 2. *Tehtävän a-kohdan kuva on alhaalla vasemmalla ja b-kohdan oikealla. Tässä tehtävässä annettu puoliavaruus* $z < 5 - y$ *leikkaa a-kohdan laatikon siististi kahtia. Syntyneeseen kuvioon ei kuulu alla olevan kuvan katto.*





Tehtävä 3. *Olkoot* $x = (2,2,2) \in \mathbb{R}^3$ *ja* $y \in \mathbb{R}^3$ *siten että* $|y| = 1$. *Laskemme ensin*

$$\begin{aligned}|x+y|^2 &= (x+y)\cdot(x+y) = |x|^2 + |y|^2 + 2x\cdot y \\ &= 13 + 2|x||y|\cos\theta = 12 + 2\sqrt{12}\cos\theta + 1,\end{aligned}$$

jossa θ *on vektoreiden* x *ja* y *välinen kulma. Nyt käyttämällä*

$$-1 \le \cos\theta \le 1,$$

(vaihtoehtoisesti Cauchy-Schwarz) saadaan kun sijoitetaan kosinin maksimi ja minimiarvot yllä olevaan lausekkeeseen

$$12 \pm 2\sqrt{12} + 1 = (2\sqrt{3} \pm 1)^2.$$

Siis $|x+y|$*:n pienin arvo on* $2\sqrt{3} - 1$ *ja suurin* $2\sqrt{3} + 1$. *Tehtävä voidaan ratkaista myös kolmioepäyhtälöllä.*

Tehtävä 4. *Olkoot* $y_k = (\frac{5+k}{k^2}, \frac{(-1)^k}{k}, \frac{2+k}{k}, \frac{1}{k}) \in \mathbb{R}^4$ *ja* $k \in \mathbb{N}_+$. *Muistutus: vektorijono suppenee jos ja vain jos sen komponenttijonot suppenevat. Suppenemistarkastelu palautuu siis kurssiin analyysi 1. Saamme helposti*

$$y_k = (\frac{5}{k^2} + \frac{1}{k}, \frac{(-1)^k}{k}, \frac{2}{k} + 1, \frac{1}{k}) \to (0,0,1,0),$$

kun k *kasvaa rajatta.*

Tehtävä 5. *Olkoon* $y_k = (2, \frac{\sin(k\pi/4)}{k}, \sin(k\pi/4)) \in \mathbb{R}^3$. *Tämä jono ei suppene, sillä kolmas komponenttijono* $\sin(k\pi/4)$ *ei suppene. Tämän seikan formaalia todistusta varten voidaan vaikka katsoa sopivia osajonoja. Esimerkiksi tarkastelemalla arvoja* $8k$ *ja* $8k+2$. *Saadaan kaksi suppenevaa osajonoa, jotka kuitenkin suppenevat eri arvoja (0 ja 1) kohti. Tästä seuraa että jono ei voi supeta.*

Tehtävä 6. *Oletetaan että* $A \subset \mathbb{R}^n$ *suljettu sekä epätyhjä (tyhjän joukon reuna on aina tyhjä, joten väite pätee myös tässä tapauksessa). Osoitettava että* $\partial A \subset A$. *Oletetaan* $x \in \partial A$, *jolloin reuna ei voi olla tyhjä (väite pätee triviaalisti jos näin olisi). Todetaan että joukko* $B(x, \frac{1}{k}) \cap A$ *ei ole tyhjä, sillä jokainen* x*:n ympäristö kohtaa* A*:n (reunapisteen määritelmän nojalla). Voidaan siis valita jokaisella positiivisella kokonaisluvulla* k *piste* x_k *joukosta* $B(x, \frac{1}{k}) \cap A$.
Koska $|x_k - x| < \frac{1}{k}$ *nähdään helposti että jono suppenee kohti* x*:ää* $\mathbb{R}^n$*:ssä. Saatiin jono* x_k A*:ssa joka suppenee* $\mathbb{R}^n$*:ssä kohti* x*:ää. Siis* $x \in A$, *sillä* A *on suljettu. Osoitettu* $\partial A \subset A$. $\square$