Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Vektorianalyysi
Harjoitus 10
Mallit (HL)

Tehtävä 1. *Olkoot* $\Gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, *laskettava annettu integraali*

$$\int_\Gamma (3x - 2y)dx + (y + 2z)dy - x^2 dz.$$

Merkitään

$$F(x, y, z) = (3x - 2y, y + 2z, -x^2),$$

jolloin

$$F(\Gamma(t)) = (3t - 2t^2, t^2 + 2t^3, -t^2)$$

sekä $d\Gamma(t) = (1, 2t, 3t^2)dt$. *Tällöin yllä oleva integraali tarkoittaa*

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(\Gamma(t))d\Gamma(t) &= \int_0^1 (3t - 2t^2, t^2 + 2t^3, -t^2) \cdot (1, 2t, 3t^2)dt \\ &= \int_0^1 (3t - 2t^2 + 2t^3 + t^4)dt = \frac{23}{15}.\end{aligned}$$

Vaihtoehtoisilla merkinnöillä voidaan laskea ensin

$$\int_\Gamma (3x - 2y)dx = \int_0^1 (3t - 2t^2)dt = \frac{5}{3},$$

$$\int_\Gamma (y + 2z)dy = \int_0^1 (t^2 + 2t^3)d(t^2) = \int_0^1 (t^2 + 2t^3)2tdt = \frac{13}{10},$$

$$\int_\Gamma (-x^2)dz = \int_0^1 -t^2 d(t^3) = \int_0^1 -t^2 3t^2 dt = -\frac{3}{5}.$$

Laskemalla nämä yhteen saadaan $\frac{23}{15}$.

Tehtävä 2. *Jos* $F(x, y) = (y, y^2) = (F_1, F_2)$, *niin*

$$\partial_2 F_1 = 1 \neq 0 = \partial_1 F_2.$$

Siis F *ei voi olla eksakti. Jos* $F(x, y) = (x, y + 2)$, *niin selvästi*

$$\nabla(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2y) = (x, y + 2).$$

Siis F*:llä on potentiaali* $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2y$, *joten* F *on eksakti. Jos et heti huomaa potentiaalia, niin kannattaa tarkistaa ehto* $\partial_1 F_2 = \partial_2 F_1$, *joka on selvästi voimassa. Nyt koska* $\mathbb{R}^2$ *on yhdestiyhtenäinen, niin tiedämme että* F*:llä on potentiaali. Tämän etsimiseksi voidaan käyttää ehtoa* $\partial_1 \phi = F_1 = x$. *Josta integroimalla saadaan* $\phi = \frac{1}{2}x^2 + \psi(y)$. *Ehdosta* $\partial_2 \phi = F_2 = y + 2$ *saadaan* $\psi'(y) = y + 2$ *eli* $\psi(y) = \frac{1}{2}y^2 + 2y +$*vakio. Siis eräs potentiaali on* $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2y$.

Tehtävä 3. *Olkoot* $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *sileä eksakti vektorikenttä. Tarkastellaan sileän vektorikentän* $G = (F_2, F_1) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *eksaktisuutta. Koska* $\mathbb{R}^2$ *on yhdesti yhtenäinen (seuraa tehtävästä 5), niin riittää osoittaa että vektorikenttä toteuttaa ehdon* $\partial_1 G_2 = \partial_2 G_1$*. Huomataan että tämä tarkoittaa*

$$\partial_1 F_1 = \partial_2 F_2,$$

mikä ei yleisesti päde. Vastaesimerkiksi kelpaa $F(x, y) = (x, 0)$*. Tällöin* F*:llä on potentiaali* $\frac{1}{2}x^2$*. Siis* F *on eksakti. Nyt jos* $G = (0, x)$ *, niin*

$$\partial_2 G_1 = 0 \neq 1 = \partial_1 G_2.$$

Siis väite ei päde. Huomaa että on myös olemassa vektorikenttiä joille väite pätee. Esimerkiksi kelpaa vektorikenttä $F = (x, y)$*.*

Tehtävä 4. *Olkoot*

$$F = (e^x \cos y + yz, xz - e^x \sin y, xy + z).$$

Tällöin F *on sileä vektorikenttä* $\mathbb{R}^3$*:ssa. Merkitsemällä*

$$\begin{aligned} X &= (e^x \cos y, -e^x \sin y, 0) \\ Y &= (yz, xz, xy) \\ Z &= (0, 0, z), \end{aligned}$$

huomataan helposti että

$$\begin{aligned} X + Y + Z &= F \\ X &= \nabla e^x \cos y \\ Y &= \nabla xyz \\ Z &= \nabla \frac{1}{2} z^2. \end{aligned}$$

Siis $F = \nabla(e^x \cos y + xyz + \frac{1}{2}z^2)$*, joten* F *on eksakti potentiaalilla*

$$e^x \cos y + xyz + \frac{1}{2} z^2$$

Vaihtoehtoisesti etsimme ehdon potentiaalin olemassaololle. Tämä tehdään kuten dimensiossa 2 eli jos $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *on potentiaali niin* $F = \nabla \phi$*. Tällöin ehto saadaan suoraan käyttämällä roottori identiteettiä*

$$\nabla \times F = det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 & \partial_1 & \partial_3. \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \nabla \times \nabla \phi = 0$$

Toinen tapa on katsoa ehdot $\partial_1 F_2 = \partial_2 F_1$*,*$\partial_2 F_3 = \partial_3 F_2$ *ja* $\partial_1 F_3 = \partial_3 F_1$ *erikseen käyttämällä hyväksi* $\partial_i \partial_j \phi = \partial_j \partial_i \phi$*. Helppo lasku osoittaa että nämä ehdot ovat voimassa. Laskemme vielä potentiaalin määritelmän* *antamien differentiaaliyhtälöiden avulla. Ehdosta* $\partial_2\phi = F_2$ *saadaan integroimalla*

$$\phi = \int dy \partial_2 F_2 + \psi(x,z) = xyz + e^x \cos y + \psi(x,z).$$

Ehdosta $\partial_1\phi = F_1$ *saadaan* $\partial_1\psi(x,z) = 0$ *eli* ψ *riippuu vain* z*:sta. Nyt saadaan ehdosta* $\partial_3\phi = F_3$ *ratkaistua* $\psi(z) = \frac{1}{2}z^2$*. Siis potentiaaliksi tulee*

$$e^x \cos y + xyz + \frac{1}{2}z^2.$$

Tehtävä 5. *Olkoot* $A \subset \mathbb{R}^2$ *avoin,konveksi joukko joka sisältää origon. Osoitettava että* A *on yhdesti yhtenäinen. Olkoon* $\gamma : [0,1] \to A$ *suljettu polku eli* γ *jatkuva sekä* $\gamma(0) = \gamma(1)$*. Oletamme lisäksi että* $\gamma(0) = 0$*. Määritellään ns. homotopia* $H : [0,1] \times [0,1] \to A$ *kaavalla*

$$H(s,t) = (1-s)\gamma(t) + s \cdot 0.$$

Nyt koska A *on konveksi, niin* $(1-s)\gamma(t) + s \cdot 0 \in A$ *kun* $s,t \in [0,1]$*. Siis kuvaus* H *on hyvin määritelty. Selvästi* H *on jatkuva, sillä se on yhdiste jatkuvista kuvauksista*

$$m : [0,1] \times A \to A, m(s,a) = (1-s) \cdot a$$
$$n : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \times A, n(s,t) = (s, \gamma(t)).$$

Nyt $H(s,0) = (1-s)\gamma(0) + s \cdot 0 = \gamma(0) = 0$ *sekä* $H(s,1) = s \cdot 0 = 0$ *eli silmukka ei aukea deformaatiossa (tämä ehto puuttuu tehtävän annosta). Lisäksi* $H(0,t) = \gamma(t)$ *sekä* $h(1,t) = 0$*, joten* A *on yhdesti yhtenäinen.*

Huomautus1: *Nähdään että konveksisuusehtoa voidaan löysätä. Riittää olettaa että alueeseen kuuluvat kaikki janat origosta (tai jostain muusta kiinteästä pisteestä) mielivaltaiseen* A*:n pisteeseen. Tälläistä aluetta kutsutaan usein tähtimäiseksi.*

Huomautus2: *Yleensä homotopia teoriassa vaadimme lisäksi että homotopian aikana jokin piste pysyy paikallaan (ns. kantapiste). Tämän vuoksi oletus* $\gamma(0) = 0$*, mikä pysyy paikallaan yllä olevassa homotopiassa (Tämä tulee vaatia sillä muuten silmukka voidaan aukaista ja kutistaa aina alkupisteeseensä). Jos emme halua kiinnittää kantapistettä ennalta, niin voimme korvata origon silmukan alkupisteellä.*

Tehtävä 6. *Olkoot* $F(x,y) = (x^2y, -xy^2)$ *sekä* $\Gamma(t) = (10\cos(t), 10\sin t)$ *kiekon* $B(0,10)$ *reunan parametrisointi (oletamme että haluamme kiertää* *kiekon vastapäivään). Laskemme kuten tehtävässä 1*

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} F(\Gamma(t))d\Gamma(t) &= -20000\int_0^{2\pi} dt\cos^2 t\sin^2 t \\
&= -20000\int_0^{2\pi} dt\cos^2 t(1-\cos^2 t) \\
&= -20000\int_0^{2\pi} dt(\cos^2 t-(\cos^2 t)^2) \\
&= -5000\pi.
\end{aligned}$$

Yllä olevassa laskussa voidaan käyttää kaavaa $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ *ja tietoja* $\int_0^{2\pi}\cos 2t = 0, \int_0^{2\pi}\cos 4t = 0$. *Tällöin termistä* $\cos^2 t - (\cos^2 t)^2$ *integraaliin vaikuttava termi on vakio* $\frac{1}{8}$.

Vaihtoehtoisesti lasketaan suoraan käyttäen Greenin-kaavaa tasossa ja käyttämällä polaarikoordinaatteja. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B} F\cdot d\Gamma &= \int_B(\partial_1 F_2-\partial_2 F_1)dxdy \\
&= -\int_B(x^2+y^2)dxdy = -\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{10}drr^3 = -5000\pi.
\end{aligned}$$

Huomaa että jos kierrämme kiekon myötäpäivään on oikeanpuolinmaisen integraalin eteen on laitettava miinusmerkki. Siis tehtävän vastaus on -5000π *jos kierrämme kiekon vastapäivään ja* 5000π *jos kierrämme kiekon myötäpäivään.*