Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Vektorianalyysi
Harjoitus 5
Mallit (HL)

Tehtävä 1. *Olkoon* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x - y$. *Toteamme että* f *on sileä eli* $f \in C^\infty$*,joten kirjan ääriarvomenetelmät soveltuvat.*

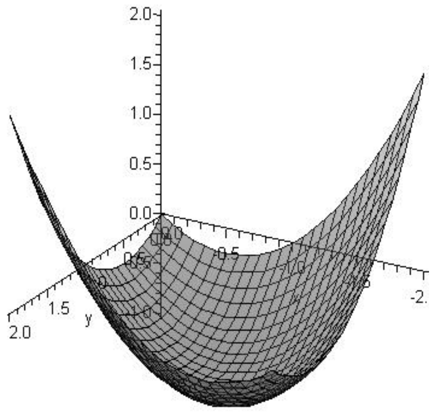
Tällöin osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} \partial_x f &= 2x + y + 1 \\ \partial_y f &= 2y + x - 1. \end{aligned}$$

Kriittinen piste on siis $(-1,1)$. *Selvitämme mahdollisen ääriarvon tyypin käyttäen kirjan kriteeriä. Laskemme ensin*

$$\begin{aligned} a &= \partial_{xx} f = 2 \\ c &= \partial_{yy} f = 2 \\ b &= \partial_{xy} f = 1, \end{aligned}$$

josta saadaan vaadituksi determinantiksi $\Delta = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3$. *Koska* $\Delta, a > 0$, *niin kyseessä on minimi.*



Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy$, *joka määrittelee sileän kuvauksen. Tällöin osittaisderivaatat ovat*

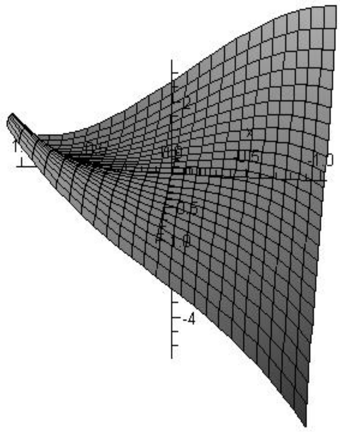
$$\begin{aligned} \partial_x f &= 3x^2 + 3y \\ \partial_y f &= -3y^2 + 3x. \end{aligned}$$

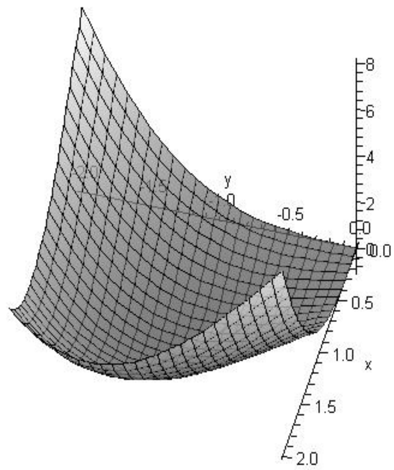
Kriittiset pisteet saadaan helposti. Nämä ovat $(0,0)$ *sekä* $(1,-1)$.

Selvitämme mahdollisen ääriarvon tyypin käyttäen kirjan kriteeriä. Laskemme ensin

$$
\begin{aligned}
a &= \partial_{xx} f = 6x \\
c &= \partial_{yy} f = -6y \\
b &= \partial_{xy} f = 3,
\end{aligned}
$$

josta saadaan vaadituksi determinantiksi tapauksessa $(0,0)$ $\Delta = -9$, *joten tässä pisteessä on satulapiste. Vastaavasti pisteessä* $(1,-1)$ *saadaan determinantiksi* $\Delta = 27$, *joten kyseessä on minimi,sillä* $a = 6 > 0$.





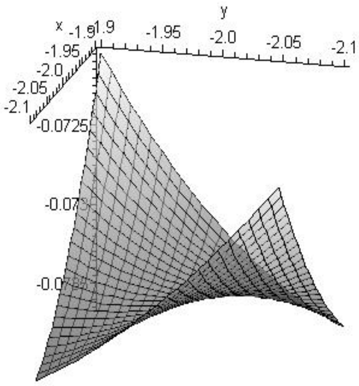
Tehtävä 2. *Olkoon* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (4 - x^2 - y^2)e^{x+y}$, *joka on sileäkuvaus. Tällöin osittaisderivaatat ovat*

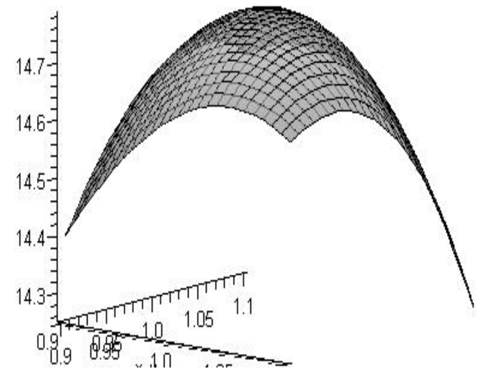
$$
\begin{aligned}
\partial_x f &= (-x^2 - 2x - y^2 + 4)e^{x+y} \\
\partial_y f &= (-x^2 - 2y - y^2 + 4)e^{x+y}.
\end{aligned}
$$

Kriittisiksi pisteiksi saadaan $(-2,-2)$ *sekä* $(1,1)$ *(Vihje: vähennä yhtälöt* $\partial_x f = 0$ *ja* $\partial_y f = 0$ *puolittain). Selvitämme mahdollisen ääriarvon kuten edellisessä tehtävässä. Laskemme ensin*

$$
\begin{aligned}
a &= \partial_{xx} f = (6 - (x+2)^2 - y^2)e^{x+y} \\
c &= \partial_{yy} f = (6 - x^2 - (y+2)^2)e^{x+y} \\
b &= \partial_{xy} f = (6 - (x+1)^2 - (y+1)^2)e^{x+y},
\end{aligned}
$$

josta saadaan vaadituksi determinantiksi tapauksessa $(-2,-2)$ $\Delta = -12e^{-8}$, *joten tässä pisteessä on satulapiste. Vastaavasti pisteessä* $(1,1)$ *saadaan determinantiksi* $\Delta = 12e^4$, *joten kyseessä on maksimi,sillä* $a = -2e^2 < 0$.





Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - 4xy^2 + x^2$, joka nähdään jälleen sileäksi. Tällöin osittaisderivaatat ovat

$$\partial_x f = 3x^2 - 4y^2 + 2x$$
$$\partial_y f = -8xy.$$

Ainoa kriittinen piste on siis $(0,0)$. Käytetään annettua vihjettä ja tutkitaan kuvausta f x-akselilla sekä käyrällä $x = y^2$. Merkitään $\phi(x) = f(x,0) = x^3 + x^2$, joka määrittelee sileän kuvauksen koko $\mathbb{R}$:ssä. Erityisesti $\phi'(0) = 0$ sekä $\phi''(0) = 2$. Tästä saadaan,että kuvauksella ϕ on lokaali minimi pisteessä $x = 0$. Vastaavasti merkitsemällä $\psi(x) = f(x^2, x) = x^6 - 3x^4$, jolloin saadaan sileä kuvaus koko $\mathbb{R}$:ssä. Saadaan ensin $\psi'(x) = 6x^3(x^2 - 2)$, josta nähdään että kohdassa $x = 0$ on maksimi (tutkimalla derivaatan merkkiä). Siis pisteen $(0,0)$ läheisyydessä x-akselilla kuvaus f saa suurempia arvoja kuin $f(0,0) = 0$. Toisaalta käyrällä $x = y^2$ kuvaus f saa pienempiä arvoja kuin 0. Päättelemme tästä että $(0,0)$ ei ole ääriarvokohta.

Tehtävä 3. *Olkoot $f \in C^1(\mathbb{R})$ ja $x_0 \in \mathbb{R}$ $f:n$ ainut aito kriittinen piste, jossa f:llä on aito lokaali minimi. Osoitettava että x_0 on absoluuttinen minimi.*

Todistus: Tehdään vastaväite, eli oletamme että on olemassa $y \in \mathbb{R}$ s.e $(y < x_0)$ ja $f(y) \leq f(x_0)$ (Tapaus $(y > x_0)$ menee oleellisesti samoin).

Koska x_0 on aito lokaali minimi sekä $f \in C^1$, niin voidaan valita $x_1 \in]y, x_0[$ s.e $f(x_1) > f(x_0)$ sekä $f'(x_1) < 0$. Nyt ideana on osoittaa, että väliltä $]y, x_1[$ löytyy piste jossa derivaatta on positiivinen. Näin on ,sillä erityisesti $f(y) < f(x_1)$, josta päätellään että f on kasvava jollain $]y, x_1[$:n osavälillä, koska $f \in C^1$. Tällä välillä derivaatta on positiivinen, joten soveltamalla Bolzanon lausetta kuvaukseen f' välillä $]y, x_1[$, löydetään piste $t \in]y, x_1[$, jossa $f'(t) = 0$. Tämä on ristiriita, sillä x_0 oli ainoa kriittinen piste.

Huomautus : derivaatan positiivisuutta sekä pisteen x_1 valintaa koskeva tulos voidaan korvata helpolla väliarvolauseen käytöllä, johon yllä oleva päättelykin perustuu. Osoitetaan esimerkillä että vastaava ilmiö ei päde $\mathbb{R}^2$:ssa. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{e^x + e^{-x^2}}$. Koska $e^x + e^{-x^2} > 0$, niin f nähdään sileäksi. Osittaisderivaatat ovat

$$\partial_x f = 2xe^{-x^2} + y^2(e^x + e^{-x^2})^{-\frac{1}{2}}(e^x - 2xe^{-x^2})$$

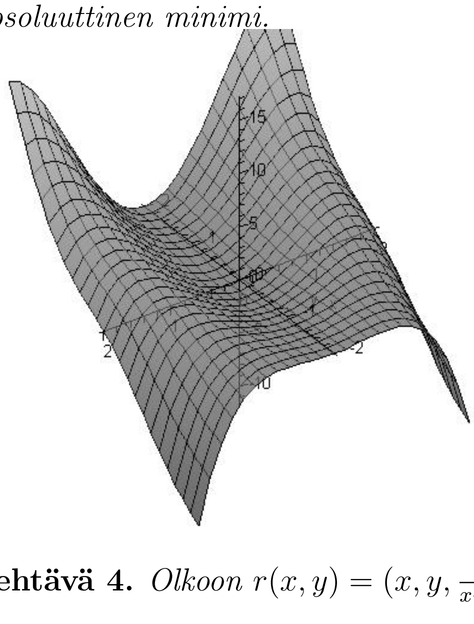
$$\partial_y f = 4y(-y^2 + \sqrt{e^x + e^{-x^2}}).$$

Ainoaksi kriittiseksi pisteeksi löydetään helposti $(0,0)$. Tässä tapaus $y^2 = \sqrt{e^x + e^{-x^2}}$, johtaa tilanteeseen $\partial_x f = e^x = 0$, mikä ei toteudu. Ääriarvon tyyppi saadaan helpoiten selville etsimällä tarvittava neliömuoto $Q(h,k)$ käyttäen Taylorin sarjoja, aivan kuten viimekerran laskuharjoituksissa (kts. mallit). Neliömuoto nähdään suoraan, sillä neliöjuuri lausekkeesta toisenasteen kehitelmään tulee vain vakio (tässä onkin ainut kohta,jossa pitää olla tarkkana, sillä tämä vakio on $\sqrt{2}$). Saadaan siis

$$Q(h,k) = h^2 + 2\sqrt{2}k^2,$$

josta nähdään välittömästi että kyseessä on aito (lokaali)minimi. Jos haluat laskea derivaattoja, niin huomaa että kohdassa $(0,0)$ termi y^2 tappaa neliöjuurilausekkeen, ,joten sitä ei kannata ryhtyä derivoimaan x:n suhteen.

Tutkitaan jälleen apukuvausta $\phi(t) = f(0,t) = -t^4 - 1 + 2t\sqrt{2}$. Nähdään että kun t kasvaa rajatta, niin ϕ lähestyy $-\infty$:ntä. Erityisesti siis f saa pienempiä arvoja kuin $f(0,0) = -1$, joten $(0,0)$ ei ole absoluuttinen minimi.



Tehtävä 4. *Olkoon $r(x,y) = (x, y, \frac{1}{x+2} + xe^{-y^2})$. Lasketaan ensin*

$$\partial_x r(x,y) = (1, 0, -\frac{1}{(x+2)^2} + e^{-y^2})$$

$$\partial_y r(x,y) = (0, 1, -2xye^{-y^2}).$$

Näistä saadaan normaalivektori ristitulon avulla

$$n(x,y) = \partial_x r(x,y) \times \partial_y r(x,y) = ((x+2)^{-2} - e^{-y^2}, 2xye^{-y^2}, 1).$$

Erityisesti pisteissä $(-1,-1)$ *ja* $(3,2)$ *saadaan*

$$n(-1,-1) = (1 - e^{-1}, 2e^{-1}, 1)$$

$$n(3,2) = (\frac{1}{25} - e^{-4}, 12e^{-4}, 1).$$

Tangenttitason yhtälö saadaan kohtisuoruusehdosta $n(x,y) \cdot (r(x,y) - r_0)$, *jossa* $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *on tangenttitason pisteen paikkavektori. Laskemme ehdon auki kysytyissä pisteissä*

$$n(-1,-1) \cdot (r(-1,-1) - r_0) = (1 - e^{-1}) \cdot (x_0 + 1) + 2e^{-1} \cdot (y_0 + 1) + 1 \cdot (z_0 + e^{-1} - 1))$$

$$n(3,2) \cdot (r(3,2) - r_0) = (\frac{1}{25} - e^{-4}) \cdot (x_0 - 3) + 12e^{-4} \cdot (y_0 - 2) + 1 \cdot (z_0 - 3e^{-4} - \frac{1}{5}).$$

Tehtävä 5. *Määritellään kuvaus* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *seuraavasti*

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2xy.$$

Nähdään välittömästi että $f \in C^1$. *Laskemme ensin että* $f(1,1) = 0$ *sekä*

$$\partial_y f(x,y) = 4y^3 - 2x.$$

Erityisesti $\partial_y f(1,1) = 2 \neq 0$, *joten implisiittifunktiolause antaa kuvauksen* $\phi : B(1,r) \to B(1,s)$, *joillain* $r, s > 0$. *Erityisesti* $\phi \in C^1$ *sekä* $f(x, \phi(x)) = 0$. *Derivoimalla tätä kaavaa, saadaan ketjusäännöllä*

$$\partial_x \phi(x) = -\frac{\partial_x f(x, \phi(x))}{\partial_y f(x, \phi(x))} = \frac{4x^3 - 2\phi(x)}{4\phi(x)^3 - 2x}.$$

Nähdään että kuvaus $t \mapsto (t, \phi(t))$ *määrittelee polun* $\mathbb{R}^2$*:ssa, kun* $t \in B(1,r)$. *Erityisesti pätee* $f((t, \phi(t))) = 0$, *joten polku kulkee yhtälön* $f(x,y) = 0$ *ratkaisujoukossa pisteen* $(1,1)$ *ympäristössä. Vaadittu tangenttivektori saadaan kaavasta*

$$\begin{aligned}(1,1) + t\partial_x|_{x=1}(x, \phi(x)) &= (1,1) + t(1, -\frac{\partial_x f(x, \phi(x))}{\partial_y f(x, \phi(x))}) \\ &= (1,1) + t(1, -\frac{4-2}{4-2}) = (1,1) + t(1,-1),\end{aligned}$$

jossa $t \in B(1,r)$. *Tangentin yhtälöksi yhtälömuodossa tulee (eliminoimalla* t *yhtälöparista* $x = 1 + t, y = 1 - t$*)*

$$y = 2 - x.$$