Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Harjoitus 4, 9.–13.2.2009
Ratkaisut (Teri Soultanis), 4 sivua

1. Olkoon $\sigma(0) = 0$ ja $\sigma(p) = 1 + 2 + \ldots + p = \frac{1}{2}p(p+1)$, kun $p \in \mathbb{N}_+$. Todista, että kaava $f\colon (m,n) \mapsto n + \sigma(m+n)$ määrittelee bijektion $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; siis nämä joukot ovat yhtä mahtavat. Missä järjestyksessä $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:n alkiot kuvautuvat luvuiksi $0, 1, 2, \ldots$ (piirrä kuvio)? *Ohje.* Määrittele $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ asettamalla $g(k) = \big(p - (k - \sigma(p)), k - \sigma(p)\big)$, kun $\sigma(p) \leq k < \sigma(p+1) = \sigma(p) + p + 1$, ja osoita, että g on f:n käänteiskuvaus.

ratkaisu: Olkoon kuvaus g kuten vihjeessä. Jos $k \in \mathbb{N}$, niin on olemassa (yksikäsitteinen) $p \in \mathbb{N}$ jolle $\sigma(p) \leq k < \sigma(p+1)$, jolloin $k - \sigma(p) \geq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}
&f(g(k)) = f(p - (k - \sigma(p)), k - \sigma(p)) \\
&= k - \sigma(p) + \sigma(p - (k - \sigma(p)) + k - \sigma(p)) = k - \sigma(p) + \sigma(p) = k.
\end{aligned}$$

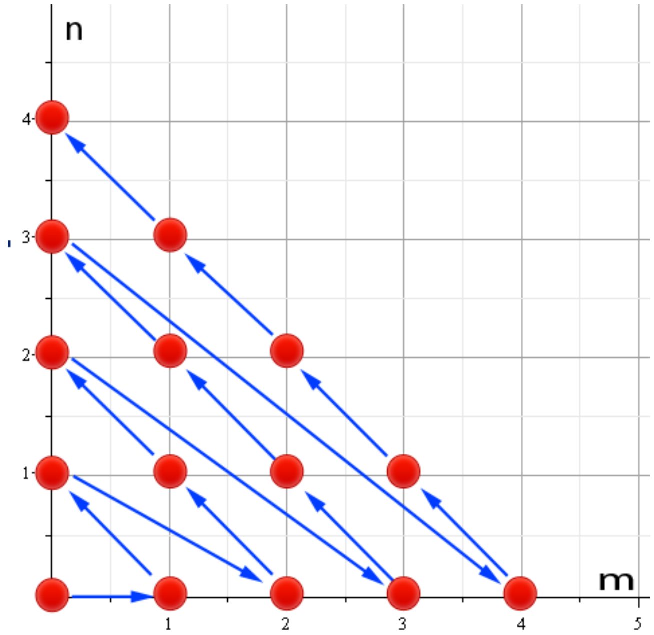
Olkoon sitten $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ja p se yksikäsitteinen luonnollinen luku, jolla $\sigma(p) \leq n + \sigma(m+n) < \sigma(p+1) = \sigma(p) + p + 1$. Tällöin itse asiassa $p = m + n$, sillä

$$\sigma(m+n) \leq n + \sigma(m+n) < m + n + 1 + \sigma(m+n) = \sigma(m+n+1).$$

Nyt voimme laskea

$$\begin{aligned}
&g(f(m,n)) \\
&= (m + n - (n + \sigma(m+n) - \sigma(m+n)), n + \sigma(m+n) - \sigma(m+n)) = (m,n).
\end{aligned}$$

Olemme näyttäneet, että $f \circ g = id_{\mathbb{N}}$ ja $g \circ f = id_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, eli f on bijektio käänteiskuvauksenaan g.



Kuva 1: f:n käänteiskuvaajan hahmotelma.

2. a) Määritellään relaatio R kokonaislukujen joukossa $\mathbb{Z}$ asettamalla $xRy \iff xy$ on parillinen. Tutki, onko tämä relaatio (i) refleksiivinen, (ii) symmetrinen, (iii) transitiivinen, (iv) ekvivalenssi. Jos (iv) pätee, määritä ekvivalenssiluokat.
b) Määritellään relaatio R tasossa $\mathbb{R}^2$ asettamalla $(x, y)R(u, v) \iff xy = uv$. Tutki samat asiat kuin a)-kohdassa.

ratkaisu:
a)

1. **refleksiivisyys:** R ei ole refleksiivinen, sillä jos $x \in \mathbb{Z}$ on pariton (esim. $x = 3$), niin myös x^2 on pariton, ja silloin ei päde xRx.
2. **symmetrisyys:** Olkoot $x, y \in \mathbb{Z}$ ja xRy. Silloin $yx = xy$ on parillinen, joten myös yRx. Relaatio R on siis symmetrinen.
3. **transitiivisuus:** Olkoot $x = 1, y = 2, z = 3$. Silloin xRy ja yRz (sillä $1 \cdot 2$ ja $2 \cdot 3$ ovat parillisia), mutta ei päde xRz, koska $1 \cdot 3$ ei ole parillinen. Täten R ei ole transitiivinen.
4. **ekvivalenssi:** Koska kaikki ylläolevista ehdoista eivät täyty, R ei voi olla ekvivalenssi.

b)

1. **refleksiivisyys:** Koska $xy = xy$, pätee $(x, y)R(x, y)$. Siis R on refleksiivinen.

2. **symmetrisyys:** Olkoon $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ ja $(x, y)R(u, v)$ eli $xy = uv$. Silloin tietysti $uv = xy$, joten $(u, v)R(x, y)$.

3. **transitiivisuus:** Jos $(x, y), (u, v), (t, s) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y)R(u, v)$ ja $(u, v)R(t, s)$, niin $xy = uv = ts$, joten myös $(x, y)R(t, s)$.

4. **ekvivalenssi:** Ylläolevan nojalla R on ekvivalenssirelaatio. Sen ekvivalenssiluokat ovat muotoa $E_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = r\}$, missä $r \in \mathbb{R}$. Toisin sanoen reaalilukua $r \neq 0$ vastaava ekvivalenssiluokka on jokin hyperbeli, jolla on asymptoottisina suorina $x-$ ja $y-$akselit ja nollaa vastaa $x-$ ja $y-$akselien yhdessä muodostama "risti".

3. Kuinka monta ekvivalenssirelaatiota on joukolla $\{1, 2, 3, 4\}$? *Ohje.* Ositukset.

ratkaisu: Ekvivalenssirelaatioita on täsmälleen yhtä paljon kuin osituksia, koska jokainen ekvivalenssirelaatio määrää yksikäsitteisen osituksen ja kääntäen. Luetellaan ositukset sen mukaan, kuinka monesta joukosta ne koostuvat:

1. {{1,2,3,4}}

2. {{1},{2,3,4}}, {{2},{1,3,4}}, {{3},{1,2,4}}, {{4},{1,2,3}}, {{1,2},{3,4}}, {{1,3},{2,4}}, {{1,4},{2,3}}

3. {{1,2},{3},{4}}, {{1,3},{2},{4}}, {{1,4},{2},{3}}, {{2,3},{1},{4}}, {{2,4},{1},{3}}, {{3,4},{1},{2}}

4. {{1},{2},{3},{4}}.

Näitä on yhteensä $1 + 7 + 6 + 1 = 15$ kappaletta.

4. Osoita, että jos $\sharp A = n \geq 1$, niin A voidaan jakaa kahdeksi ekvivalenssiluokaksi $(2^{n-1} - 1)$:llä eri tavalla.

ratkaisu: Väite voidaan todistaa induktiolla:
tapaus $n = 1$ on selvä, sillä yhden alkion joukko voidaan jakaa kahdeksi epätyhjäksi pistevieraaksi joukoksi $0 = 2^{1-1} - 1$ tavalla.
Oletetaan, että väite pätee kaikille n:n alkion joukolle jollekin tietylle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, ja olkoon A joukko, jolle $\sharp A = n + 1$. Merkitään $A = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\} =: A_0 \cup \{a_{n+1}\}$, A_0 on siis n:n alkion joukko. Jos $\{X, Y\}$ on A:n ositus, pätee tasan yksi seuraavista:

1. jompikumpi joukoista on $\{a_{n+1}\}$ ja toinen A_0

2. $X = X' \cup \{a_{n+1}\}$ ja $Y = Y'$ tai $X = X'$ ja $Y = Y' \cup \{a_{n+1}\}$ ja $\{X', Y'\}$ muodostaa A_0:n osituksen.

Vaihtoehtoa 2 edustavia A:n osituksia on induktio-oletuksen mukaan $(2^{n-1} - 1) + (2^{n-1} - 1)$ kappaletta (A_0:n kaksijoukkoisten ositusten määrä ensimmäistä ja samoin toista vaihtoehtoa kohti). Tähän täytyy lisätä vaihtoehtoa 1 edustava ositus (näitä on vain yksi kappale). Tuloksena on, että A:n kahden joukon osituksia on $2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^{(n+1)-1} - 1$ kappaletta, siis induktioväitteen mukainen määrä. Tämä todistaa väitteen.

5. Osoita, että kokonaislukujen joukon $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/E$ kertolasku on hyvinmääritelty. Toisin sanoen, osoita, että jos $[m, n], [p, q] \in \mathbb{Z}$, niin kaavan

$$[m, n] \cdot [p, q] = [mp + nq, mq + np]$$

oikea puoli riippuu vain ekvivalenssiluokista $[m, n]$ ja $[p, q]$, ei niiden edustajien valminnasta.

ratkaisu: Käytössä oleva ekvivalenssirelaatio on seuraava:

$$(m, n)E(p, q) \iff m + q = n + p.$$

Olkoon $(m, n)E(m', n')$ ja $(p, q)E(p', q')$. Meidän on todistettava:

$$[mp + nq, mq + np] = [m'p' + n'q', m'q' + n'p']$$

eli $(mp + nq, mq + np)E(m'p' + n'q', m'q' + n'p')$. Koska $p + q' = q + p'$, niin

$$\begin{aligned}
&(m + n)(p + q') = m(p + q') + n(q + p') \text{ ja} \\
&(m + n)(q + p') = m(q + p') + n(p + q') \\
&\implies m(p + q') + n(q + p') = m(q + p') + n(p + q') \\
&\iff (mp + nq) + (mq' + np') = (mq + np) + (mp' + nq') \\
&\iff (mp + nq, mq + np)E(mp' + nq', mq' + np').
\end{aligned}$$

Käyttämällä tietoa $m + n' = n + m'$ täsmälleen samalla tavoin saadaan vastaavasti $(mp' + nq', mq' + np')E(m'p' + n'q', m'q' + n'p')$. Ekvivalenssirelaation transitiivisuudesta seuraa haluttu väite:
$(mp + nq, mq + np)E(m'p' + n'q', m'q' + n'p')$.

6. Etsi Eukleideen algoritmilla kokonaislukujen 2279 ja 989 suurin yhteinen tekijä ja esitä se muodossa $2279x + 989y$ joillain $x, y \in \mathbb{Z}$.

ratkaisu:

$$\begin{aligned}
2279 &= 2 \cdot 989 + 301 \\
989 &= 3 \cdot 301 + 86 \\
301 &= 3 \cdot 86 + 43 \\
86 &= 2 \cdot 43.
\end{aligned}$$

Eukleideen algoritmin mukaisesti $\text{syt}(2279, 989) = 43$. Tästä saamme

$$\begin{aligned}
43 &= 301 - 3 \cdot 86 \\
&= 301 - 3(989 - 3 \cdot 301) \\
&= -3 \cdot 989 + 10 \cdot 301 \\
&= -3 \cdot 989 + 10(2279 - 2 \cdot 989) \\
&= -23 \cdot 989 + 10 \cdot 2279.
\end{aligned}$$