Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Ratkaisuehdotuksia harjoituksiin 3
Rami Luisto

1. Luennoilla on todistettu kaava kahden äärellisen joukon yhdisteen alkioiden lukumäärälle (muistiinpanojen s. 20). Johda tämän avulla kaava kolmen äärellisen joukon yhdisteen alkioiden lukumäärälle. Päättele myös, millainen kaava pätee n äärellisen joukon yhdisteen alkioiden lukumäärälle.

Ratkaisu: Luentojen lauseen mukaan pätee $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$. Lähdetään tutkimaan äärellisten joukkojen A, B, C yhdisteen alkioiden lukumäärää. Luentojen lauseen perusteella tiedetään, että jos joukot A ja B ovat äärellisiä, niin joukko $A \cup B$ on myös äärellinen. Koska oletimme myös joukon C äärelliseksi, niin soveltamalla lausetta uudestaan näemme, että joukko $(A \cup B) \cup C$ on myös äärellinen. Täten saamme:

$\#(A \cup B \cup C) = \#((A \cup B) \cup C) =^1 \#(A \cup B) + \#C - \#((A \cup B) \cap C)$
$=^2 \#(A \cup B) + \#C - \#((A \cap C) \cup (B \cap C))$
$=^3 \#A + \#B - \#(A \cap B) + \#C - \#((A \cap C) \cup (B \cap C))$
$=^4 \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) - (-\#((A \cap C) \cap (B \cap C)))$
$= \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$.

Selitteitä:
1: Luentojen lause.
2: Kirjoitetaan $(A \cup B) \cap C$ muotoon $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.
3: Luentojen lause sovellettuna yhdisteeseen $(A \cup B)$.
4: Luentojen lause sovellettuna yhdisteeseen $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Tämä onkin kolmen joukon yhdisteen haluttu muoto. Jatkamalla samaa ideaa huomaamme seuraavan. Mikäli joukot $A_1, \ldots, A_n, \quad n \geq 1$, ovat äärellisiä, pätee:

$\#(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \#A_1 + \ldots \#A_n - (\sum_{1 \leq i < j \leq n} \#(A_i \cap A_j))$
$+(\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k)) + \ldots + (-1)^{n+1} \#(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$.

2. Tarkastellaan lukuja $x_1, x_2, \ldots, x_{11} \in \{2, 3, \ldots, 30\}$. Osoita, että joillakin kahdella niistä on yhteinen alkutekijä (eli jaoton tekijä ≥ 2).

Ratkaisu: Merkitään $B = \{p \in \mathbb{P}\colon p \leq 30\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$, eli kyseessä on lukua 30 pienempien alkulukujen joukko. Olkoon nyt A tehtävänannossa mainittu joukko lukuja $x_1, x_2, \ldots, x_{11} \in \{2, 3, \ldots, 30\}$. Mikäli joillain $i, j \in \{1, \ldots, 11\}, i \neq j$, pätisi $x_i = x_j$, olisi näillä selvästi yhteinen alkutekijä. Olettakaamme siis, että $x_i \neq x_j$ kaikilla $i, j \in \{1, \ldots, 11\}, i \neq j$.

Tehtävässä on näppärää käyttää lokeroperiaatetta. Olisi äärimmäisen hyödyllistä, mikäli saisimme määriteltyä kuvauksen $g\colon A \to B$ siten, että kaikilla $x \in A$ pätisi $g(x)|x$. Lokeroperiaatteen avulla huomaamme, ettei mikään kuvaus joukolta A joukolle B voi olla injektio, jolloin erityisesti löytäisimme kaksi eri joukon A alkiota x, y, joille pätisi $g(x) = g(y)$. Tällöin nimittäin $g(x)|x$ ja $g(y) = g(x)|y$, eli luvut x ja y olisivat jaollisia samalla ykköstä suuremmalla luvulla, jolloin niillä olisi varmasti yhteinen alkutekijä. Tällaisia kuvauksia voisi muodostaa useammallakin tavalla, toiset työläämpiä, toiset vähemmän työläitä. Eräs helpohko tapa esitetään seuraavassa.

Muodostetaan kuvaus $f\colon A \to B$ asettamalla $f(x) =$ luvun $x \in A$ pienin alkutekijä. Jokaisella luvulla on alkutekijähajotelma ja jokaisessa epätyhjässä joukossa alkulukuja on pienin alkio, joten kuvaus on hyvinmääritelty. Lisäksi kuvauksen maalijoukko sisältyy joukkoon B, sillä jos luvulla olisi alkutekijä joka olisi aidosti suurempi kuin 30, olisi luku itsekin suurempi kuin kolmekymmentä. Tässä vaiheessa huomaamme, että $\#A = 11$ (muista, että oletimme aikaisemmin että $x_i \neq x_j$ kaikilla $i, j \in \{1, \ldots, 11\}, i \neq j$) ja $\#B = 10$, joten lokeroperiaatteen perusteella kuvaus f ei voi olla injektio. Toisin sanoen, ainakin kahdella eri lähtöavaruuden alkiolla on sama pienin alkutekijä, joten kumpikin on jaollinen kyseisellä luvulla. Tämä todistaa väitteen.

3. Jos $n \geq 1$, niin minkä tahansa $n + 1$ kokonaisluvun joukossa on kaksi, joiden erotus on jaollinen n:llä.

Ratkaisu: Mikäli olisimme epähuomiossa valinneet itsellemme $n + 1$ kokonaislukua, joiden joukossa olisi kaksi samaa, olisi näiden erotus tietenkin nolla ja täten se olisi jaollinen luvulla n. (Toisaalta joukon määritelmässä vaaditaan, että kukin alkio esitetään vain kerran, joten jos joukossa olisi kaksi samaa alkiota, olisi joukon koko pienempi kuin $n + 1$.) Otetaan lokeroperiaate taas käyttöön muodostamalla hyödyllinen funktio. Olkoon A tehtävänannon kokoelma kokonaislukuja siten, että $\#A = n + 1$. Olkoon $B = \{k \in \mathbb{N}\colon 0 \leq k \leq n - 1\}$. Huomataan heti alkuun, että $\#B = n$. Palautetaan lukiosta mieleen jakojäännökset ja muodostetaan kuvaus $f\colon A \to B$ asettamalla $f(a) =$ luvun a jakojäännös luvun n suhteen.

(*Toisin sanoen $f(a) = b$ jos ja vain jos on olemassa luonnollinen luku c siten, että $a = cn + b$. Tämä jakojäännös on aina olemassa, yksikäsitteinen ja kuuluu tapauksessamme joukkoon B. Tullaan todistamaan kurssilla, kunhan saamme ensin selville, mitä ovat kokonaisluvut.*)

Lokeroperiaatteesta seuraa, että kuvauksemme ei voi taaskaan olla injektio, eli kahdella eri luvulla $x, y \in A$ on sama jakojäännös luvun n suhteen. Toisin sanoen $x = k_1 n + b$ ja $y = k_2 n + b$, missä $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Tällöin $x - y = k_1 n + b - (k_2 n + b) = n(k_1 - k_2)$, eli luku $x - y$ on jaollinen luvulla n, kuten haluttiin.

4. Olkoot X ja Y joukkoja ja $A \subset X$, $B \subset Y$. Osoita, että $\complement_{X\times Y}(A\times B) = (\complement_X A \times Y) \cup (X \times \complement_Y B) = (\complement_X A \times \complement_Y B) \cup (A \times \complement_Y B) \cup (\complement_X A \times B)$, jossa esimerkiksi $\complement_X A = X \diagdown A$ tarkoittaa joukon A komplementtia joukossa X.

Ratkaisu: Olkoon $(x, y) \in X \times Y$.
$(x, y) \in \complement_{X\times Y}(A \times B)$
$\Leftrightarrow (x, y) \notin A \times B$
$\Leftrightarrow x \notin A$ tai $y \notin B$
$\Leftrightarrow (x \notin A$ ja $y \in Y)$ tai $(x \in X$ ja $y \notin B)$
$\Leftrightarrow (x, y) \in (\complement_X A \times Y)$ tai $(x, y) \in (X \times \complement_Y B)$
$\Leftrightarrow (x, y) \in (\complement_X A \times Y) \cup (X \times \complement_Y B)$

Toisen yhtälön todistaminen:
Muistetaan, että $(x, y) \in \complement_{X\times Y}(A \times B) \Leftrightarrow (x, y) \notin A \times B$. Pisteellä (x, y) on nyt kolme eri vaihtoehtoa. Joko $x \notin A$ ja $y \notin B$, tai $x \notin A$ ja $y \in B$, tai $x \in A$ ja $y \notin B$. Vaihtoehto $x \in A$ ja $y \in B$ ei ole mahdollinen koska pisteemme ei kuulunut joukkojen A ja B karteesiseen tuloon.

Muotoilu $x \notin A$ ja $y \notin B$, tai $x \in A$ ja $y \notin B$, tai $x \notin A$ ja $y \in B$ voidaan kirjoittaa yhtäpitävästi muotoon $(x, y) \in (\complement_X A \times \complement_Y B) \cup (A \times \complement_Y B) \cup (\complement_X A \times B)$, joka on juuri se väite jonka halusimme todistaa.

5. Olkoon X joukko ja $P = \mathcal{P}(X) = \{A | A \subset X\}$ joukon X potenssijoukko. Osoita, että X ja P eivät ole yhtä mahtavia ja, tätä kautta, että on olemassa joukko, joka ei ole numeroituva. *Ohje.* Olkoon $f\colon X \to P$ mielivaltainen kuvaus. Osoita, että tällöin $\{x \in X \mid x \notin f(x)\} \notin f(X)$, joten kuvaus f ei ole surjektio. Osoita tämän tuloksen avulla, että ei ole olemassa injektiota $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$.

Ratkaisu: Lähdetään etenemään ohjeen viitoittamalla tiellä. Olkoon siis $f\colon X \to P$ mielivaltainen kuvaus. Merkitään $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. Haluamme näyttää, että kuvauksemme ei voi olla surjektio, joten meille riittää näyttää että löydämme yhdenkin maalijoukon alkion, johon mikään lähtöjoukon alkio ei kuvaudu. Teemme sen joukon A avulla:

Väite: $A \notin f(X)$. Tehdään vastaoletus: on olemassa $x \in X$, jolle pätee $f(x) = A$. Tutkitaan kuuluuko alkio x joukkoon A vai ei. Oletetaan siis ensin, että $x \in A = f(x)$. Joukon A määritelmän nojalla tämä tarkoittaa sitä, että $x \notin A$, mikä on ristiriita. Siten ei voi siis päteä, että alkio x kuuluisi joukkoon A. Nyt jos puolestaan oletamme, että $x \notin A = f(x)$, niin joukon A määritelmän nojalla $x \in A$. Saamme taas ristiriidan, joten alkio x ei voi olla kuulumatta joukkoon A. Nämä kaksi kohtaa yhdessä muodostavat ristiriidan, joten vastaoletuksemme $A \in f(X)$ on siten väärä, joten $A \notin f(x)$. Kuitenkin $A \subset X$, joten $A \in P$. Täten mielivaltainen kuvauksemme ei voi olla surjektio, eikä siis etenkään bijektio.

Kuitenkin voimme rakentaa injektion $g\colon X \to P$ asettamalla $g(x) = \{x\}$. Erityisesti on siis olemassa injektio $g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, joten huomaamme, että joukko $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ on ääretön, eli vähintään numeroituva, mutta äskeisen perusteella ei ole olemassa surjektiota, eli erityisesti ei ole olemassa bijektiota, joukolta $\mathbb{N}$ joukolle $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, joten luonnollisten lukujen potenssijoukko on aidosti mahtavampi kuin luonnollisten lukujen joukko ja siten ylinumeroituva.

Huomautus: tehtävänannossa annetussa ratkaisuohjeessa neuvottiin näyttämään, että ei ole olemassa injektiota joukolta $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *joukolle* $\mathbb{N}$*, mutta tämä viittaa toiseen, hieman monimutkaisempaan ratkaisuideaan. Luennoilla on nimittäin todistettu, että joukko* A *on korkeintaan numeroituva, eli siis äärellinen tai numeroituva, jos ja vain jos on olemassa injektio joukolta* A *joukkoon* $\mathbb{N}$*. Yllä olevasta ratkaisusta, erityisesti siitä ettei ole olemassa haluttua surjektiota, voisimme myös päätellä, että ei voi olla olemassa halutunlaista injektiota, mutta tämä olisi kiertotie verrattuna äskeiseen.*

6. Määritellään tasossa $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R},\, x_2 \in \mathbb{R}\}$ relaatiot R_1 ja R_2 asettamalla
$(x_1, x_2)R_1(y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \le y_1$ ja $x_2 \le y_2$,
$(x_1, x_2)R_2(y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 < y_1$, tai $x_1 = y_1$ ja $x_2 \le y_2$

(tässä $\le$ on $\mathbb{R}$:n tavallinen järjestys). Osoita, että R_1 ja R_2 ovat molemmat osittaisia järjestyksiä. Ovatko ne täysiä järjestyksiä?

Ratkaisu: Tutkitaan kumpaakin relaatiota osittaisjärjestyksen ehto kerrallaan. Koko ratkaisun ajan oletamme, että $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$.

(i) R_1**:**

<u>Refleksiivisyys:</u> $x_1 = x_1$ ja $x_2 = x_2$, joten erityisesti $x_1 \le x_1$ ja $x_2 \le x_2$, joten $(x_1, x_2)R_1(x_1, x_2)$.

<u>Antisymmetrisyys:</u> $(x_1, x_2)R_1(y_1, y_2)$ ja $(y_1, y_2)R_1(x_1, x_2)$
$\Leftrightarrow x_1 \le y_1$ ja $x_2 \le y_2$ ja $y_1 \le x_1$ ja $y_2 \le x_2$

$\Leftrightarrow x_1 \leq y_1$ ja $y_1 \leq x_1$ ja $x_2 \leq y_2$ ja $y_2 \leq x_2$
$\Leftrightarrow x_1 = y_1$ ja $y_1 = x_1 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.
Transitiivisuus: $(x_1, x_2)R_1(y_1, y_2)$ ja $(y_1, y_2)R_1(z_1, z_2)$
$\Leftrightarrow x_1 \leq y_1$ ja $x_2 \leq y_2$ ja $y_1 \leq z_1$ ja $y_2 \leq z_2$
$\Leftrightarrow x_1 \leq y_1$ ja $y_1 \leq z_1$ ja $x_2 \leq y_2$ ja $y_2 \leq z_2$
$\Rightarrow x_1 \leq z_1$ ja $x_2 \leq z_2 \Rightarrow (x_1, x_2)R_1(z_1, z_2)$. Kyseessä on siis osittainen järjestys. R_1 ei kuitenkaan ole täysi järjestys, sillä jos valitaan esimerkiksi $(x_1, x_2) = (0, 1)$ ja $(y_1, y_2) = (1, 0)$, niin nyt $x_2 \not\leq y_2$, joten ei päde $(x_1, x_2)R_1(y_1, y_2)$, ja vastaavasti $y_1 \not\leq x_1$, jolloin ei siis päde $(y_1, y_2)R_1(x_1, x_2)$.

(ii) R_2

Refleksiivisyys: Koska $x_1 = x_1$ ja $x_2 = x_2$, niin erityisesti $x_1 = x_1$ ja $x_2 \leq x_2$, jolloin siis $(x_1, x_2)R_2(x_1, x_2)$.

Antisymmetrisyys: Oletetaan, että $(x_1, x_2)R_2(y_1, y_2)$ ja $(y_1, y_2)R_2(x_1, x_2)$, eli yhtäpitävästi $((x_1 < y_1)$ tai $(x_1 = y_1$ ja $x_2 \leq y_2))$ ja $((y_1 < x_1)$ tai $(y_1 = x_1$ ja $y_2 \leq x_2))$

Jos $x_1 < y_1$, niin tällöin ei voi olla $y_1 < x_1$, eikä $x_1 = y_1$. Tällöin siis ei päde $(y_1, y_2)R_2(x_1, x_2)$. Joten oltava $x_1 \geq y_1$. Vaihtamalla koordinaattien x_1 ja y_1 roolit huomataan, että vastaavasti oltava $y_1 \geq x_1$. Näistä siis seuraa, että $x_1 = y_1$.

Nyt koska $x_1 = y_1$ niin kumpikaan väitteistä$(y_1 < x_1)$ tai $(x_1 < y_1)$ ei päde, joten on oltava $(x_1 = y_1$ ja $x_2 \leq y_2)$, sekä $(y_1 = x_1$ ja $y_2 \leq x_2)$, eli erityisesti pätee $x_2 \leq y_2$ ja $y_2 \leq x_2$, josta saamme, että myös $x_2 = y_2$. Eli relaatio on antisymmetrinen.

Transitiivisuus: Olkoon $(x_1, x_2)R_1(y_1, y_2)$ ja $(y_1, y_2)R_1(z_1, z_2)$.

Nyt relaation määritelmästä seuraa, että välttämättä $y_1 < z_1$ tai $y_1 = z_1$, eli erityisesti $y_1 \leq z_1$. Jos $x_1 < y_1$, niin äskeisen perusteella $x_1 < y_1 \leq z_1$, josta saamme $x_1 < z_1$, jolloin $(x_1, x_2)R_1(z_1, z_2)$.

Jos taas $x_1 \not< y_1$, niin oltava $x_1 = y_1$ ja $x_2 \leq y_2$, koska $(x_1, x_2)R_1(y_1, y_2)$. Nyt jos $y_1 < z_1$, niin jälleen $x_1 = y_1 < z_1$, mistä seuraa $x_1 < z_1$, eli $(x_1, x_2)R_1(z_1, z_2)$. Olkoon siis $y_1 \not< z_1$. Tällöin oltava $y_1 = z_1$ ja $y_2 \leq z_2$, koska $(y_1, y_2)R_1(z_1, z_2)$. Tästä seuraa, että $x_1 = y_1 = z_1$, eli $x_1 = z_1$, ja $x_2 \leq y_2 \leq z_2$, eli $x_2 \leq z_2$, joten $(x_1, x_2)R_1(z_1, z_2)$. Olemme käyneet läpi kaikki tapaukset, joten relaatio R_2 on siis transitiivinen.

Relaation R_2 täyteys. Olkoot $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ sellaisia, että ei päde $(x_1, x_2)R_2(y_1, y_2)$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $x_1 \geq y_1$ ja $(x_1 \neq y_1$

tai $x_2 > y_2$). Toisin muotoillen siis tällöin pätee, että ($x_1 \geq y_1$ ja $x_1 \neq y_1$) tai ($x_1 \geq y_1$ ja $x_2 > y_2$)). Erityisesti on siis voimassa $y_1 < x_1$ tai ($y_1 = x_1$ ja $y_2 < x_2$), jolloin $(y_1, y_2)R_2(x_1, x_2)$. Tämä todistaa väitteen.

Relaation R_2 muodostama järjestys tunnetaan myös nimellä sanakirjajärjestys. Jos ajattelette pisteparia (x, y) kahden kirjaimen sanana, niin relaatio verratessaan kahta sanaa tarkistaa ensin ovatko ensimmäiset kirjaimet eri järjestyksessä (eli onko toinen pidemmällä reaalilukujen aakkosissa). Mikäli toisen sanan ensimmäinen kirjan on toisen sanan kirjainta edellä, tulee ensimmäinen sana sanakirjassa ensin. Mikäli ensimmäiset kirjaimet ovat samat, siirtyy relaatio tarkastelemaan seuraavaa kirjainta. Tämän relaation yleistäminen on siis sekä mukavaa, kiinnostavaa, että hyödyllistä (sanojen aakkosjärjestykseen laittamista tietokoneella silmälläpitäen.)