Algebra I, 1. kurssikokeen 2. korvaava koe ti 3.3.2009/Ratk. (JL) ja arvostelukommentit (EE)

1. Osoita induktiolla luvun $n \geq 1$ suhteen, että jos $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, niin

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \leq n \cdot \max\{k_1, \ldots, k_n\}.$$

(Yllä $\max\{k_1, \ldots, k_n\}$ tarkoittaa joukon $\{k_1, \ldots, k_n\}$ suurinta lukua.)

Ratk. Väite pätee yhtälönä, jos $n = 1$, sillä tällöin $\sum_{i=1}^{1} k_i = k_1 = \max\{k_1\}$. Olkoon sitten $n \geq 1$ sellainen, että jos $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, niin $\sum_{i=1}^{n} k_i \leq n \cdot \max\{k_1, \ldots, k_n\}$. Tällöin, jos $k_1, \ldots, k_{n+1} \in \mathbb{N}$ ja merkitään $k = \max\{k_1, \ldots, k_{n+1}\}$, niin

$$\sum_{i=1}^{n+1} k_i = \sum_{i=1}^{n} k_i + k_{n+1} \leq n \cdot \max\{k_1, \ldots, k_n\} + k_{n+1} \leq nk + k = (n+1)k.$$

Arvostelusta: tapaus $n = 1$: 1 p., induktio-oletuksen muotoilu: 1 p., induktioaskel: 4 p.

2. Osoita, että kuvaus $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$,

$$f(n) = \begin{cases} -n/2, & \text{jos } n \text{ on parillinen,} \\ (n+1)/2, & \text{jos } n \text{ on pariton,} \end{cases}$$

on bijektio, ja määritä sen käänteiskuvaus. Konstruoi lisäksi bijektio $f'\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, jolla $f'(10) = 7$. (Kurssillamme $0 \in \mathbb{N}$.)

Ratk. Siis f kuvaa parillisten luonnollisten lukujen joukon aidosti väheten ei-positiivisten kokonaislukujen joukolle ja parittomien luonnollisten lukujen joukon aidosti kasvaen positiivisten kokonaislukujen joukolle. Näin ollen f on bijektio. Mutta osoitetaan suoraan laskemalla, että kuvaus $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$,

$$g(n) = \begin{cases} -2n, & \text{jos } n \leq 0, \\ 2n-1, & \text{jos } n > 0, \end{cases}$$

toteuttaa ehdot $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ ja $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, jolloin voidaan päätellä, että todellakin f on bijektio ja että lisäksi g <u>on kuvauksen</u> f <u>käänteiskuvaus</u>: $f^{-1} = g$. Ensinnäkin, jos $n \in \mathbb{N}$ on parillinen, niin $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(-n/2) = -2(-n/2) = n$, ja jos $n \in \mathbb{N}$ on pariton, niin $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g((n+1)/2) = 2((n+1)/2) - 1 = n$. Toiseksi, jos $n \in \mathbb{Z}$ ja $n \leq 0$, niin $(f \circ g) = f(g(n)) = f(-2n) = -(-2n)/2 = n$, ja jos $n \in \mathbb{Z}$ ja $n > 0$, niin $(f \circ g) = f(g(n)) = f(2n-1) = ((2n-1)+1)/2 = n$.

Bijektio $f'\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, jolla $f'(10) = 7$, saadaan helposti f:n avulla huomaamalla, että $f(10) = -5$, jolloin riittää valita bijektio $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, jolla $h(-5) = 7$, ja asettaa $f' = h \circ f$; tarvittavan bijektion h saa esimerkiksi kaavalla $h(n) = n + 12$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ ($h^{-1}\colon n \mapsto n - 12$) tai asettamalla $h(-5) = 7$, $h(7) = -5$ sekä $h(n) = n$ kaikilla $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-5, 7\}$ ($h^{-1} = h$).

Arvostelusta: injektiivisyys 2 p., surjektiivisuus 2 p., käänteiskuvauksen lauseke 2 p.

3. a) Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita määritelmän nojalla, että joukon $\mathbb{Z}$ relaatio $E_n \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, jolla

$$xE_ny \iff x - y \in n\mathbb{Z}, \quad \text{kun } x, y \in \mathbb{Z},$$

on ekvivalenssi. (Yllä $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$.)

b) Tarkastellaan joukon $\mathbb{Z}$ relaatioita $E = E_4 \cup E_6$ ja $E' = E_4 \cup E_{12}$. Osoita, että toinen niistä on ekvivalenssi, toinen ei.

Ratk. a) (i) Jos $x \in \mathbb{Z}$, niin $x - x = 0 = n \cdot 0 \in n\mathbb{Z}$ ja siis xE_nx; täten E_n on refleksiivinen.

(ii) Jos $x, y \in \mathbb{Z}$ ja xEy, niin $x - y \in n\mathbb{Z}$ ja siis $x - y = nk$ jollain $k \in \mathbb{Z}$, jolloin $y - x = n(-k) \in n\mathbb{Z}$ ja siis yE_nx; täten E_n on symmetrinen.
(iii) Jos $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ja xE_ny sekä yE_nz, niin $x - y \in n\mathbb{Z}$ sekä $y - z \in n\mathbb{Z}$ ja siis $x - y = nk$ sekä $y - z = nl$ joillain $k, l \in \mathbb{Z}$, jolloin $x - z = (x - y) + (y - z) = nk + nl = n(k + l) \in n\mathbb{Z}$ ja siis xE_nz; täten E_n on transitiivinen.

Kohtien (i)–(iii) perusteella E_n on $\mathbb{Z}$:n ekvivalenssirelaatio.

b) Nyt $xEy \iff (xE_4y \text{ tai } xE_6y)$ sekä $xE'y \iff (xE_4y \text{ tai } xE_{12}y)$, kun $x, y \in \mathbb{Z}$.

On helposti nähtävissä, että E on refleksiivinen ja symmetrinen, mutta osoitetaan, että E ei ole transitiivinen eikä siis ekvivalenssi: Koska $0E_44$ ja $4E_610$, niin $0E4$ ja $4E10$, mutta koska ei $0E_410$ eikä $0E_610$, niin ei $0E10$.

Huomataan, että $12 = 4 \cdot 3$. Jos siis $x, y \in \mathbb{Z}$ ja $xE_{12}y$, niin $x - y \in 12\mathbb{Z} \subset 4\mathbb{Z}$, joten xE_4y; täten $E_{12} \subset E_4$, ja näin ollen $E' = E_4 \cup E_{12} = E_4$ on ekvivalenssi.

Arvostelusta: a)-kohta 3 p., b)-kohta 3 p.

4. Olkoot $\max(x, y) = \max\{x, y\}$ ja $\min(x, y) = \min\{x, y\}$ joukon $\{x, y\} \subset \mathbb{N}$ suurin alkio ja pienin alkio, kun $x, y \in \mathbb{N}$. Tutki, ovatko $(\mathbb{N}, \max)$ ja $(\mathbb{N}, \min)$ monoideja.

Ratk. Helposti nähdään, että $\max(x, \max(y, z)) = \max\{x, y, z\}$ ja $\max(\max(x, y), z) = \max\{x, y, z\}$ kaikilla $x, y, z \in \mathbb{N}$ (käydään vaikkapa läpi kaikki tapaukset $x \le y \le z$, $y \le z \le x$, $z \le x \le y$, $x \le z \le y$, $z \le y \le x$ ja $y \le x \le z$). Siis
$$\max(x, \max(y, z)) = \max(\max(x, y), z), \quad \text{kun } x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Täten max on liitännäinen laskutoimitus joukossa $\mathbb{N}$. (Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa $\mathbb{N}$:n laskutoimituksen min liitännäisyys, vaikka tätä ei nyt tarvitakaan:
$$\min(x, \min(y, z)) = \min(\min(x, y), z) \ (= \min\{x, y, z\}), \quad \text{kun } x, y, z \in \mathbb{N}.)$$

Laskutoimituksella max on lisäksi neutraalialkio $0 \in \mathbb{N}$, sillä jos $x \in \mathbb{N}$, niin $0 \le x$ ja siis $\max(x, 0) = x = \max(0, x)$. Täten $(\mathbb{N}, \max)$ on monoidi.

Osoitetaan, että $\mathbb{N}$:n laskutoimituksella min ei ole neutraalialkiota. Tällöin $(\mathbb{N}, \min)$ ei ole monoidi. *Yksi tapa*: Olkoon $e \in \mathbb{N}$ sellainen, jolla $\min(x, e) = x = \min(e, x)$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$; tällöin $x \le e$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $\mathbb{N}$:n osajoukoista vain äärelliset ovat rajoitettuja ja että siis $\mathbb{N}$ itse ei ole rajoitettu. *Toinen tapa*: Jos $e \in \mathbb{N}$, niin e ei ole neutraalialkio laskutoimitukselle min, sillä jos määritellään $x = e + 1 \in \mathbb{N}$, niin $e < x$ ja siis $\min(x, e) = e \ne x$.

Arvostelusta: $(\mathbb{N}, \max)$: liitännäisyys 1 p., neutraalialkio 2 p.; samoin $(\mathbb{N}, \min)$, paitsi että 3 p. voi saada ilman liitännäisyyden tutkimista, koska sitä ei välttämättä tarvita.