Algebra I, 1. kurssikokeen 1. korvaava koe pe 27.2.2009/Ratk. (JL) ja arvostelukommentit (EE)

1. Määritellään luvut f_n, kun $n \in \mathbb{N}$, rekursiivisesti seuraavalla tavalla:

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \text{ kun } n \geq 1.$$

Osoita induktiolla, että f_{n+1} ja f_n ovat keskenään jaottomat kullakin $n \geq 0$.

Ratk. Selvästi $f_n \in \mathbb{N}_+ (= \mathbb{N} \setminus \{0\})$ on määritelty kullakin $n \geq 0$ (tämä vaatisi induktiotodistuksen, joka nyt ohitetaan). Se, että positiiviset kokonaisluvut a ja b ovat *keskenään jaottomat*, tarkoittaa, että 1 on niiden ainoa yhteinen positiivinen tekijä eli että $\operatorname{syt}(a,b) = 1$.

Osoitetaan induktiolla, että $\operatorname{syt}(f_{n+1}, f_n) = 1$ kaikilla $n \geq 0$. Tapauksessa $n = 0$ on $\operatorname{syt}(f_1, f_0) = \operatorname{syt}(1,1) = 1$. Olkoon sitten $n \geq 0$ sellainen, jolla $\operatorname{syt}(f_{n+1}, f_n) = 1$. Tällöin, jos $k \in \mathbb{N}_+$ on lukujen f_{n+2} ja f_{n+1} yhteinen tekijä, niin k on myös luvun $f_n = f_{n+2} - f_{n+1}$ tekijä, joten k on lukujen f_{n+1} ja f_n yhteinen tekijä ja siis $k = 1$; täten $\operatorname{syt}(f_{n+2}, f_{n+1}) = 1$.

Arvostelusta: tapaus n=0: 1 p., induktio-oletuksen muotoilu: 1 p., induktioaskel: 4 p.

2. Osoita, että kuvaus $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$,

$$f(n) = \begin{cases} -2n, & \text{jos } n \leq 0, \\ 2n-1, & \text{jos } n > 0, \end{cases}$$

on bijektio, ja määritä sen käänteiskuvaus.

Ratk. Kuvaus f on bijektio, sillä f kuvaa ei-positiivisten kokonaislukujen joukon aidosti väheten parillisten luonnollisten lukujen joukolle ja positiivisten kokonaislukujen joukon aidosti kasvaen parittomien luonnollisten lukujen joukolle. Mutta osoitetaan suoraan laskemalla, että kuvaus $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$,

$$g(n) = \begin{cases} -n/2, & \text{jos } n \text{ on parillinen}, \\ (n+1)/2, & \text{jos } n \text{ on pariton}, \end{cases}$$

toteuttaa ehdot $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ ja $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, jolloin voidaan päätellä, että todellakin f on bijektio ja että lisäksi g <u>on kuvauksen</u> f <u>käänteiskuvaus</u>: $f^{-1} = g$. Ensinnäkin, jos $n \in \mathbb{Z}$ ja $n \leq 0$, niin $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(-2n) = -(-2n)/2 = n$, ja jos $n \in \mathbb{Z}$ ja $n > 0$, niin $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(2n-1) = ((2n-1)+1)/2 = n$. Toiseksi, jos $n \in \mathbb{N}$ on parillinen, niin $(f \circ g) = f(g(n)) = f(-n/2) = -2(-n/2) = n$, ja jos $n \in \mathbb{N}$ on pariton, niin $(f \circ g) = f(g(n)) = f((n+1)/2) = 2((n+1)/2) - 1 = n$.

Arvostelusta: injektiivisyys 2 p., surjektiivisuus 2 p., käänteiskuvauksen lauseke 2 p.

3. a) Olkoot X ja Y joukkoja ja $f \colon X \to Y$ kuvaus. Osoita määritelmän nojalla, että joukon X relaatio R_f, jolle

$$x \, R_f \, y \iff f(x) = f(y), \quad \text{kun } x, y \in X,$$

on ekvivalenssi.

b) Olkoon $X = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Kun $n \in X$, olkoon $P(n)$ luvun n alkutekijöiden joukko ja $\pi(n) = \sharp P(n)$ luvun n erisuurten alkutekijöiden lukumäärä. Määritä ekvivalenssiluokkien joukot X/R_π ja X/R_P kuvauksille $\pi \colon X \to \mathbb{N}$ ja $P \colon X \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Ratk. a) (i) Jos $x \in X$, niin $f(x) = f(x)$, joten $xR_f x$; täten R_f on refleksiivinen.
(ii) Jos $x, y \in X$ ja $xR_f y$, niin $f(x) = f(y)$ ja siis $f(y) = f(x)$, jolloin $yR_f x$; täten R_f on symmetrinen.
(iii) Jos $x, y, z \in X$, $xR_f y$ ja $yR_f z$, niin $f(x) = f(y)$ ja $f(y) = f(z)$ ja siis $f(x) = f(z)$, jolloin $xR_f z$; täten R_f on transitiivinen.

Kohtien (i)–(iii) perusteella R_f on joukon X ekvivalenssirelaatio.

b) Laaditaan kysymyksestä taulukko (ATH(n) = luvun n alkutekijähajotelma):

n	ATH(n)	$P(n)$	$\pi(n)$
1	1	$\emptyset$	0
2	2	$\{2\}$	1
3	3	$\{3\}$	1
4	2^2	$\{2\}$	1
5	5	$\{5\}$	1
6	$2 \cdot 3$	$\{2, 3\}$	2
7	7	$\{7\}$	1
8	2^3	$\{2\}$	1
9	3^2	$\{3\}$	1
10	$2 \cdot 5$	$\{2, 5\}$	2
11	11	$\{11\}$	1
12	$2^2 \cdot 3$	$\{2, 3\}$	2
13	13	$\{13\}$	1
14	$2 \cdot 7$	$\{2, 7\}$	2
15	$3 \cdot 5$	$\{3, 5\}$	2
16	2^4	$\{2\}$	1
17	17	$\{17\}$	1
18	$2 \cdot 3^2$	$\{2, 3\}$	2
19	19	$\{19\}$	1
20	$2^2 \cdot 5$	$\{2, 5\}$	2

Nähdään, että

$$X/R_\pi = \{\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19\}, \{6, 10, 12, 14, 15, 18, 20\}\} \quad \text{ja}$$
$$X/R_P = \{\{1\}, \{2, 4, 8, 16\}, \{3, 9\}, \{5\}, \{6, 12, 18\}, \{7\}, \{10, 20\}, \{11\}, \{13\}, \{14\}, \{15\}, \{17\}, \{19\}\}.$$

Arvostelusta: a)-kohta 3 p., b)-kohta 3 p.

4. Funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *pariton*, jos $f(-x) = -f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja *parillinen*, jos $f(-x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Olkoon $\mathcal{F}_-$ kaikkien parittomien funktioiden $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joukko ja $\mathcal{F}_+$ kaikkien parillisten funktioiden $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joukko. Tutki, voidaanko joukoissa $\mathcal{F}_-$ ja $\mathcal{F}_+$ määritellä laskutoimitus kuvausten yhdistämisellä eli kaavalla $(f, g) \mapsto f \circ g$ ja, jos voidaan, ovatko $(\mathcal{F}_-, \circ)$ ja $(\mathcal{F}_+, \circ)$ tällöin monoideja.

Ratk. Jos $f, g \in \mathcal{F}_-$, niin $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -(f \circ g)(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten $f \circ g \in \mathcal{F}_-$. Jos $f, g \in \mathcal{F}_+$, niin $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten $f \circ g \in \mathcal{F}_+$. Täten <u>molemmissa joukoissa</u> $\mathcal{F}_-$ <u>ja</u> $\mathcal{F}_+$ <u>voidaan määritellä laskutoimitus kaavalla</u> $(f, g) \mapsto f \circ g$.

Koska $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ kaikilla kuvauksilla $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, niin joukkojen $\mathcal{F}_-$ ja $\mathcal{F}_+$ laskutoimitus $\circ$ on liitännäinen.

Koska $\mathrm{id}_\mathbb{R}(-x) = -x = -\mathrm{id}_\mathbb{R}(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin $\mathrm{id}_\mathbb{R} \in \mathcal{F}_-$, ja tunnetusti $\mathrm{id}_\mathbb{R} \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_\mathbb{R}$ kaikilla kuvauksilla $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja siis erityisesti kaikilla $f \in \mathcal{F}_-$. Täten $\mathrm{id}_\mathbb{R}$ on neutraalialkio joukon $\mathcal{F}_-$ laskutoimitukselle $\circ$. Siis $(\mathcal{F}_-, \circ)$ <u>on monoidi</u>.

Osoitetaan, että joukon $\mathcal{F}_+$ laskutoimituksella $\circ$ ei ole neutraalialkiota, jolloin siis $(\mathcal{F}_+, \circ)$ <u>ei ole monoidi</u>. *Yksi tapa*: Olkoon $e\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaus, jolla $e \circ f = f = f \circ e$ kaikilla $f \in \mathcal{F}_+$; koska $x \mapsto |x|$ ja $x \mapsto -|x|$ ovat parillisia kuvauksia $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, niin täten $e(|x|) = |x|$ ja $e(-|x|) = -|x|$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja siis $e(x) = x$, kun $x \geq 0$, sekä $e(x) = x$, kun $x \leq 0$; näin ollen $e = \mathrm{id}_\mathbb{R}$; mutta koska tällöin esimerkiksi $e(-1) = -1 \neq 1 = e(1)$, niin $e \notin \mathcal{F}_+$. *Toinen tapa*: Jos $e \in \mathcal{F}_+$, niin $e(-|x|) = e(|x|)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten ei voi olla sekä $e \circ f_1 = f_1$ että $e \circ f_2 = f_2$ alkioille $f_1 = (x \mapsto |x|) \in \mathcal{F}_+$ ja $f_2 = (x \mapsto -|x|) \in \mathcal{F}_+$.

Arvostelusta: laskutoimitukset määriteltyjä 2 p., liitännäisyys 1 p., neutraalialkion olemassaolo 3 p. (1 p. + 2 p.)