Algebra I
1. kurssikoe 25.2.2009
Ratkaisuja.

1. Kokeillaan $1! < 2^1$, $2! < 2^2$, $3! < 2^3$, $4! > 2^4$. } 1p.
Siis $n_0 = 4$.
väite. $n! \geq 2^n \quad \forall n \geq 4$. } 1p.
tod. $n = 4$: $4! \geq 2^4$ ok.
induktio-oletus : $n \geq 4$ ja oletetaan $n! \geq 2^n$. } 1p.
Tällöin $\underline{\underline{(n+1)!}} = (n+1)\cdot n! \underset{\text{ind.ol.}}{\geq} n \cdot 2^n \underset{n \geq 4}{\geq} 2 \cdot 2^n = \underline{\underline{2^{n+1}}}$. } 3p

Induktioperiaatteen nojalla $n! \geq 2^n$ pätee $\forall n \geq 4$. $\square$

2. ① f injektio : olk. $x, y \in \mathbb{N}$ ja $x \neq y$.
(i) x, y parillisia. Tällöin $f(x) = \frac{x}{2} \neq \frac{y}{2} = f(y)$.
(ii) x, y parittomia. Tällöin $f(x) = -\frac{x+1}{2} \neq -\frac{y+1}{2} = f(y)$.
(iii) toinen parillinen, toinen pariton : Tällöin $f(x) \neq f(y)$,
koska $f(\text{"parillinen luku"}) \geq 0$ ja $f(\text{"pariton luku"}) < 0$. } 2p.

② f surjektio : olk. $y \in \mathbb{Z}$ mielivalt.
(i) $y \geq 0$. Tällöin $x = 2y \in \mathbb{N}$ ja x on parillinen
ja $f(x) = \frac{x}{2} = \frac{2y}{2} = y$.
(ii) $y < 0$. Tällöin $x = \underbrace{-2y}_{\geq 2} - 1 \in \mathbb{N}$, x on pariton
ja $f(x) = -\frac{(-2y-1)+1}{2} = -\frac{-2y}{2} = y$. } 2p.

① & ② $\Rightarrow$ f on bijektio.

③ käänteiskuvaus $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$g(y) = \begin{cases} 2y, & y \geq 0 \\ -2y-1, & y < 0. \end{cases}$$ } 2p.

3. a) <u>ol.</u> E_1, E_2 ekvivalenssirelaatioita $\boxed{xEy \Leftrightarrow xE_1y \text{ ja } xE_2y}$

<u>v.</u> $E = E_1 \cap E_2$ on ekvivalenssirelaatio

<u>tod.</u> (i) refl. : olk. $x \in \mathbb{Z}$. Nyt xE_1x ja xE_2x, joten xEx. 1 p.

(ii) symm. : ol. xEy eli xE_1y ja xE_2y. Nyt yE_1x ja yE_2x eli yEx. 1 p.

(iii) transitiivisuus: ol. xEy ja yEz. Tällöin xE_1y ja xE_2y ja yE_1z ja yE_2z eli

$$\underbrace{xE_1y \text{ ja } yE_1z}_{\Rightarrow xE_1z} \text{ ja } \underbrace{xE_2y \text{ ja } yE_2z}_{\Rightarrow xE_2z},$$

joten xEz. 1 p.

b) $xE_1y \Leftrightarrow 72 \mid x-y$

$xE_2y \Leftrightarrow 60 \mid x-y$.

Siis $xEy \Leftrightarrow 72 \mid x-y$ ja $60 \mid x-y \Leftrightarrow \overbrace{\text{pyj}(72,60)}^{=360} \mid x-y$ 3 p.

$\Leftrightarrow x \equiv y \pmod{360}$.

4. 1) Joukko $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{Z} \mid A \text{ äärellinen}\}$

Jos $A, B \in \mathcal{F}$, niin $A \cap B$ on äärellinen eli $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Siis voidaan määr. laskutoimitus $(A,B) \mapsto A \cap B$.

Monoidi? Liitännäisyys ok.

Neutraalialkio? Jos $E \in \mathcal{F}$ olisi neutraalialkio, olisi siis $E \cap A = A$ ($\forall A \subset \mathbb{Z}$) $\forall A \in \mathcal{F}$. Koska $\mathbb{Z}$ on ääretön, niin $\exists x \in \mathbb{Z} \setminus E$. Tällöin $E \cap \{x\} = \emptyset \neq \{x\}$ RR.

Siis <u>ei</u> monoidi.

2) $\mathcal{F}_c = \{A \subset \mathbb{Z} \mid \mathbb{Z} \setminus A \text{ äärellinen}\}$

Jos $A, B \in \mathcal{F}_c$, niin $\mathbb{Z} \setminus (A \cap B) = \underbrace{(\mathbb{Z} \setminus A)}_{\text{ääréll.}} \cup \underbrace{(\mathbb{Z} \setminus B)}_{\text{äärell.}}$ on äärellinen,

joten $(A \cap B) \in \mathcal{F}_c$. Siis voidaan määr. k.o. laskutoimitus.

Monoidi? $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ liitännäisyys ok.

neutrialkio on $\mathbb{Z} \in \mathcal{F}_c$: $\mathbb{Z} \cap A = A \cap \mathbb{Z} = A \quad \forall A \in \mathcal{F}_c$.

Siis <u>on</u> monoidi.

Arvostelusta: laskutoim. määritelty 3 p. (2+1)

liitännäisyys 1 p.

neutrialkio 2 p. (1+1)