Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Korvaava 2. kurssikoe ma 11.5.2009

1. Olkoot G_1 ja G_2 (multiplikatiivisia) ryhmiä ja N_i ryhmän G_i normaali aliryhmä, kun $i = 1, 2$. Osoita ryhmien homomorfialauseen avulla, että $N = N_1 \times N_2$ on tuloryhmän $G = G_1 \times G_2$ normaali aliryhmä ja että tekijäryhmä G/N on isomorfinen ryhmän $(G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$ kanssa. **Ohje.** Olkoon $p_i \colon G_i \to G_i/N_i$ kanoninen surjektio, kun $i = 1, 2$, ja olkoon $f \colon G \to (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$ kuvaus $(x_1, x_2) \mapsto (p_1(x_1), p_2(x_2))$. Osoita, että f on surjektiivinen homomorfismi ja että $\mathrm{Ker}(f) = N$.

2. a) Osoita, että multiplikatiiviset ryhmät $\mathbb{Z}_{175}^*$ ja $\mathbb{Z}_{200}^*$ eivät ole isomorfiset laskemalla näiden ryhmien kertaluvut eli alkioiden lukumäärät.

b) Osoita, että ryhmä $\mathbb{Z}_7^*$ ja additiivinen ryhmä $\mathbb{Z}_6$ ovat isomorfiset.

3. Olkoon R rengas. Alkioiden $a, b \in R$ *kommutaattori* on alkio $[a, b] = ab - ba \in R$.

a) Olkoon I renkaan R ideaali. Osoita, että seuraavat kolme ehtoa ovat yhtäpitävät:

(i) $[a, b] \in I$ kaikilla $a, b \in R$.

(ii) $c[a, b] \in I$ kaikilla $a, b, c \in R$.

(iii) $[a, b]c \in I$ kaikilla $a, b, c \in R$.

Ohje. Osoita (iii)$\Longrightarrow$(i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$(iii). Huomaa, että $[a, b]c - c[a, b]$ on itsekin kommutaattori.

b) Osoita, että kullekin R:n ideaalille I pätee, että tekijärengas R/I on kommutatiivinen jos ja vain jos I sisältää R:n kaikki kommutaattorit.

4. Määritä renkaassa $\mathbb{Z}_3[x]$ polynomien $f = x^3 + x^2 + x + 1$ ja $g = x^2 + 2$ suurin yhteinen tekijä pääpolynomina d (siis d:n johtavan kertoimen on oltava $= 1$) ja esitä d muodossa $uf + vg$ joillain $u, v \in \mathbb{Z}_3[x]$.