Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Harjoitus 9, 30.3.–3.4.2009

1. a) Etsi syklisen ryhmän $\mathbb{Z}_{30}$ kaikki aliryhmät (riittää ilmoittaa kunkin virittäjä) ja piirrä kaavio niiden sisältyvyyksistä toisiinsa. Jos H ja K ovat $\mathbb{Z}_{30}$:n aliryhmiä, joilla on $H \subsetneqq K$ eli yhtäpitävästi $H < K$, mutta joilla $H < L < K$ ei päde yhdelläkään $\mathbb{Z}_{30}$:n aliryhmällä L, niin sijoita piirroksessa K ylemmäksi kuin H ja yhdistä ne viivalla. *Ohje.* Etsi ensin luvun 30 positiiviset tekijät ja piirrä vastaava kaavio niiden jaollisuudesta toisillaan.

b) Määritä syklisen ryhmän $\mathbb{Z}_{18}$ kaikkien alkioiden kertaluvut. *Ohje.* Valmiilla kaavalla määrittämättä alkioiden virittämiä aliryhmiä.

2. Olkoon $n \in \mathbb{N}_+$. Osoita, että joukko $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ on renkaan $\mathbb{R}$ alirengas.

3. Oletetaan tunnetuksi, että jos $n \in \mathbb{N}_+$, niin $\sqrt{n}$ on irrationaalinen jos ja vain jos n ei ole minkään kokonaisluvun neliö. Ovatko renkaat $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ja $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ isomorfiset? Etsi kaikki rengasisomorfismit $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

4. Osoita, että renkaan $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ kääntyvien alkioiden eli yksiköiden ryhmä on

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}]^* = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 5b^2 = \pm 1\}.$$

Anna myös kummassakin tapauksessa $a^2 - 5b^2 = 1$ ja $a^2 - 5b^2 = -1$ esimerkki yksiköstä $a + b\sqrt{5}$, jolla $b \neq 0$.

5. Olkoon R rengas. Alkio $a \in R$ on *nilpotentti*, jos $a^n = 0$ jollain $n \in \mathbb{N}_+$. (Tässä ollut painovirhe "$a \in \mathbb{N}_+$" korjattu 1.4.2009.) Osoita, että jos $a \in R$ on nilpotentti, niin $1 + a$ on kääntyvä. *Ohje.* Arvaa, minkä äärellisen "geometrisen" sarjan summa $(1 + a)^{-1}$ olisi.

6. Olkoon R kommutatiivinen rengas ja $\mathrm{Nil}(R) = \{a \in R \mid a \text{ on nilpotentti}\}$. Osoita, että $\mathrm{Nil}(R)$ on R:n ideaali.