Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Harjoitus 8, 23.–27.3.2009

1. Osoita, että kullakin $n \in \mathbb{N}_+$ lukujen n^5 ja n viimeiset numerot kymmenkantaisessa järjestelmässä ovat samat. *Ohje.* Avuksi Fermat.

2. Olkoon G (multiplikatiivinen) ryhmä, $H \leq G$ aliryhmä ja $N \trianglelefteq G$ normaali aliryhmä. Osoita, että joukko

$$HN = \{hn \mid h \in H,\, n \in N\}$$

on G:n aliryhmä.

3. Osoita, että (multiplikatiivisen) ryhmän G *keskus*

$$Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa \text{ kaikilla } x \in G\}$$

on G:n normaali aliryhmä ja että G:n sisäisten automorfismien ryhmä on isomorfinen tekijäryhmän $G/Z(G)$ kanssa.

4. Etsi ryhmän S_3 kaikki aliryhmät. Mitkä aliryhmistä ovat normaaleja? *Ohje ensimmäiseen kohtaan.* Jos $\{\mathrm{id}\} < H < S_3$, niin Lagrangen lauseen nojalla on $|H| = 2$ tai 3, joten H on syklinen.

5. Olkoon G (multiplikatiivinen) Abelin ryhmä, $|G| = 6$, $a \in G$ ja $\mathrm{ord}(a) = 3$. Osoita, että G on syklinen ryhmä. *Ohje.* Huomaa, että $G/\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_2$.

6. Osoita, että additiiviset ryhmät $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ja $\mathbb{Q}$ eivät ole syklisiä.

Lisäpisteitä laskuharjoituksista kurssikokeiden summaan saa 1, 2, 3, 4, 5 tai 6, jos on laskenut kaikista tehtävistä 25, 35, 45, 55, 65 tai 75 % eli siis ($11 \cdot 6 = 66$) vastaavasti 16–22, 23–29, 30–35, 36–42, 43–49 tai 50–66 tehtävää.