Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Harjoitus 7, 16.–20.3.2009

1. Osoita, että ryhmä $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, jossa matriisi $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ vastaa tason $\mathbb{R}^2$ kiertoa origon ympäri kulman θ verran vastapäivään, sisältää alkion kutakin kertalukua $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$.

2. Tarkastellaan jäännösluokkaryhmää $(\mathbb{Z}_3, +)$. Osoita, että kuvaus $f\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$,

$$f = \begin{pmatrix} 0_3 & 1_3 & 2_3 \\ 0_3 & 2_3 & 1_3 \end{pmatrix},$$

on homomorfismi.

3. Olkoon $f\colon G \to G'$ surjektiivinen homomorfismi sykliseltä ryhmältä G ryhmälle G'. Todista, että G' on syklinen osoittamalla, että ryhmän G virittäjän a kuva $f(a)$ virittää ryhmän G'.

4. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$. Määritä homomorfismi $f\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$, jolla $f(1) = A$. Määritä myös alkion A kertaluku.

5. Olkoon $f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ kaavan $f(m,n) = 5m - 3n$ määrittämä kuvaus. Osoita, että f on additiivisten ryhmien surjektiivinen homomorfismi, jonka ydin $\mathrm{Ker}(f)$ on alkion $(3,5)$ virittämä $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:n syklinen aliryhmä.

6. Olkoon G multiplikatiivinen ryhmä. Kun $g \in G$, määrittelemme kuvauksen $c_g\colon G \to G$ asettamalla $c_g(a) = gag^{-1}$ kaikilla $a \in G$. Todista, että $c_{1_G} = \mathrm{id}_G$, $c_{g_1 g_2} = c_{g_1} \circ c_{g_2}$ kaikilla $g_1, g_2 \in G$ ja c_g on G:n automorfismi kaikilla $g \in G$.