Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Harjoitus 6, 9.–13.3.2009
Siis IV periodin 1. viikolla!

1. Olkoot M ja M' multiplikatiivisia monoideja. Kuvaus $f\colon M \to M'$ on *monoidihomomorfismi*, jos

1° $f(ab) = f(a)f(b)$ kaikilla $a, b \in M$;
2° $f(1_M) = 1_{M'}$.

Osoita esimerkillä, että ehto 2° ei seuraa ehdosta 1°.

2. Olkoon G ryhmä, jonka kertaluku on korkeintaan 5. Osoita, että G on Abelin ryhmä. *Ohje.* Voit menetellä vaikkapa seuraavasti. Oleta, että on olemassa alkiot $a, b \in G$, joilla $ab \neq ba$. Osoita, että tällöin $1, a, b, ab, ba$ ovat eri alkioita ja että G:n kertaluku on siis $|G| = 5$. Johda sitten yhtälöistä $aG = Ga\,(= G)$ ja $bG = Gb\,(= G)$ kaksi eri esitystä ab:lle ja niistä lopuksi ristiriita. Tässä esimerkiksi $aG = \{ax \mid x \in G\}$ ja $Ga = \{xa \mid x \in G\}$

3. Olkoon $X \subset \mathbb{R}^2$ suljettu suorakaide kärkinään $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (2,1)$ ja $D = (0,1)$. Määritä suorakaiteen X symmetrioiden ryhmän G alkiot ja niiden tulot. (Suorakaiteen X *symmetria* on etäisyydet säilyttävä bijektio $f\colon X \to X$, ja laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen.)

4. Ratkaise yhtälöt $a \circ x = b$ ja $y \circ a = b$ ryhmässä S_4, kun

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Onko $\{\overline{1}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{9}\}$ ryhmän $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$ aliryhmä? Entä $\{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8}\}$?

6. Kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on bi-Lipschitz, jos on olemassa sellainen luku $L \geq 1$, että

$$|x - y|/L \leq |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{kaikilla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Voidaan osoittaa, että tällöin f on aidosti monotoninen bijektio [J. Väisälä: *Topologia I*, ht. 4:10 ja ht. 9:11]. Permutaatioryhmän $S_{\mathbb{R}}$ alkioina ovat taas kaikki bijektiot $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja laskutoimituksena kuvausten yhdistäminen.

a) Osoita, että bi-Lipschitz-kuvausten $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joukko BL on ryhmän $S_{\mathbb{R}}$ aliryhmä.

b) Sen tiedon avulla, että jokainen $f \in \mathrm{BL}$ on aidosti monotoninen eli siis joko aidosti kasvava ($f(x) < f(y)$, kun $x, y \in \mathbb{R}$ ja $x < y$) tai aidosti vähenevä ($f(x) > f(y)$, kun $x, y \in \mathbb{R}$ ja $x < y$), määritä ryhmän BL alkioiden kertalukujen joukko

$$\{\mathrm{ord}(f) \mid f \in \mathrm{BL}\} \subset \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}.$$

Tässä siis kuvaukselle $f \in \mathrm{BL}$ on $\mathrm{ord}(f) = \min\{n \in \mathbb{N}_+ \mid f^n = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\}$, jos on olemassa $n \in \mathbb{N}_+$, jolla $f^n = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$; muutoin on $\mathrm{ord}(f) = \infty$.