

1. Todista alkulukuhajoittelman yksikäsitteisyyden avulla seuraavat väitteet:

a) Kuvaus  $(m, n) \mapsto 3^m 5^n$  on injektio  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

b) Jos  $p$  on alkuluku, niin yhtälöllä  $x^2 = p$  ei ole ratkaisua  $x \in \mathbb{Q}$ .

2. Etsi Eratosteneen seulaa käyttäen kaikki alkuluvut  $< 150$ . Etsi tämän jälkeen lukujen 7676, 7677 ja 19317 alkutekijähajoitelmat. (Kokeile laskimen avulla jaollisuutta löytämällä alkuluvuilla.)

3. Tutki jokaisella  $\alpha \in \mathbb{Z}_5$ , kuinka monta eri alkioita on joukossa  $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots\}$ .

4. a) Ratkaise kongruenssi  $16x \equiv 3 \pmod{23}$  etsimällä sellainen  $c \in \mathbb{Z}$ , että  $c \cdot 16 \equiv 1 \pmod{23}$ .

b) Ratkaise kongruenssi  $4x \equiv 8 \pmod{12}$  esimerkiksi kokeilemalla.

c) Ratkaise samanaikaiset kongruenssit  $x \equiv 5 \pmod{8}$  ja  $x \equiv 4 \pmod{17}$  kiinalaisen jäännöslauseen avulla.

5. Määritellään  $x \top y = x + y + xy$ , kun  $x, y \in \mathbb{Z}$ . Osoita, että joukon  $\mathbb{Z}$  laskutoimitus  $\top$  on liitännäinen ja vaihdannainen ja että sillä on neutraalialkio (mikä nimittäin?).

6. Olkoon  $\top$  joukon  $A$  laskutoimitus, jolla on neutraalialkio ja jolla

$$a \top (b \top c) = (a \top c) \top b \quad \text{kaikilla } a, b, c \in A.$$

Osoita, että  $\top$  on liitännäinen ja vaihdannainen.