Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Harjoitus 4, 9.–13.2.2009

1. Olkoon $\sigma(0) = 0$ ja $\sigma(p) = 1 + 2 + \ldots + p = \frac{1}{2}p(p+1)$, kun $p \in \mathbb{N}_+$. Todista, että kaava $f\colon (m,n) \mapsto n + \sigma(m+n)$ määrittelee bijektion $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; siis nämä joukot ovat yhtä mahtavat. Missä järjestyksessä $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:n alkiot kuvautuvat luvuiksi $0, 1, 2, \ldots$ (piirrä kuvio)? *Ohje.* Määrittele $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ asettamalla $g(k) = \big(p - (k - \sigma(p)), k - \sigma(p)\big)$, kun $\sigma(p) \leq k < \sigma(p+1) = \sigma(p) + p + 1$, ja osoita, että g on f:n käänteiskuvaus.

2. a) Määritellään relaatio R kokonaislukujen joukossa $\mathbb{Z}$ asettamalla $xRy \iff xy$ on parillinen. Tutki, onko tämä relaatio (i) refleksiivinen, (ii) symmetrinen, (iii) transitiivinen, (iv) ekvivalenssi. Jos (iv) pätee, määritä ekvivalenssiluokat.

b) Määritellään relaatio R tasossa $\mathbb{R}^2$ asettamalla $(x,y)R(u,v) \iff xy = uv$. Tutki samat asiat kuin a)-kohdassa.

3. Kuinka monta ekvivalenssirelaatiota on joukolla $\{1, 2, 3, 4\}$? *Ohje.*Ositukset.

4. Osoita, että jos $\sharp A = n \geq 1$, niin A voidaan jakaa kahdeksi ekvivalenssiluokaksi $(2^{n-1} - 1)$:llä eri tavalla.

5. Osoita, että kokonaislukujen joukon $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/E$ kertolasku on hyvinmääritelty. Toisin sanoen, osoita, että jos $[m,n], [p,q] \in \mathbb{Z}$, niin kaavan

$$[m,n] \cdot [p,q] = [mp + nq, mq + np]$$

oikea puoli riippuu vain ekvivalenssiluokista $[m,n]$ ja $[p,q]$, ei niiden edustajien valminnasta.

6. Etsi Eukleideen algoritmilla kokonaislukujen 2279 ja 989 suurin yhteinen tekijä ja esitä se muodossa $2279x + 989y$ joillain $x, y \in \mathbb{Z}$.