Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Harjoitus 3, 2.–6.2.2009

1. Luennoilla on todistettu kaava kahden äärellisen joukon yhdisteen alkioiden lukumäärälle (muistiinpanojen s. 20). Johda tämän avulla kaava kolmen äärellisen joukon yhdisteen alkioiden lukumäärälle. Päättele myös, millainen kaava pätee n äärellisen joukon yhdisteen alkioiden lukumäärälle.

2. Tarkastellaan lukuja $x_1, x_2, \ldots, x_{11} \in \{2, 3, \ldots, 30\}$. Osoita, että joillakin kahdella niistä on yhteinen alkutekijä (eli jaoton tekijä ≥ 2).

3. Jos $n \geq 1$, niin minkä tahansa $n+1$ kokonaisluvun joukossa on kaksi, joiden erotus on jaollinen n:llä.

4. Olkoot X ja Y joukkoja ja $A \subset X$, $B \subset Y$. Osoita, että

$$\complement_{X\times Y}(A \times B) = \big(\complement_X A \times Y\big) \cup \big(X \times \complement_Y B\big) = \big(\complement_X A \times \complement_Y B\big) \cup \big(A \times \complement_Y B\big) \cup \big(\complement_X A \times B\big),$$

jossa esimerkiksi $\complement_X A = X \setminus A$ tarkoittaa joukon A komplementtia joukossa X.

5. Olkoon X joukko ja $P = \mathcal{P}(X) = \{A | A \subset X\}$ joukon X potenssijoukko. Osoita, että X ja P eivät ole yhtä mahtavia ja, tätä kautta, että on olemassa joukko, joka ei ole numeroituva. *Ohje.* Olkoon $f\colon X \to P$ mielivaltainen kuvaus. Osoita, että tällöin $\{x \in X \mid x \notin f(x)\} \notin f(X)$, joten f ei ole surjektio. Osoita tämän tuloksen avulla, että ei ole olemassa injektiota $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$.

6. Määritellään tasossa $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ relaatiot R_1 ja R_2 asettamalla

$$(x, y)R_1(x', y') \iff x \leq x' \text{ ja } y \leq y',$$
$$(x, y)R_2(x', y') \iff x < x', \text{ tai } x = x' \text{ ja } y \leq y'$$

(tässä $\leq$ on $\mathbb{R}$:n tavallinen järjestys). Osoita, että R_1 ja R_2 ovat molemmat osittaisia järjestyksiä. Ovatko ne täysiä järjestyksiä?