Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Harjoitus 2, 26.–30.1.2009

1. Olkoon $f\colon A \to B$ kuvaus ja olkoot $A_1, A_2 \subset A$ sekä $B_1, B_2 \subset B$ osajoukkoja. Osoita, että

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2), \quad f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

Pysyvätkö kaavat voimassa, kun symboli $\cup$ korvataan symbolilla $\cap$?

2. Olkoon A tason ympyröiden joukko, B tason pisteiden joukko ja $f\colon A \to B$ kuvaus, jolla $f(x)$ on x:n keskipiste. Onko f
a) injektio,
b) surjektio?

3. Määritellään kuvaukset $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ja

$$f(x) = \big(2 - g(x)\big)x + g(x), \quad \text{kun } x \in \mathbb{R}.$$

Osoita, että f on bijektio.

4. Osoita, että kuvaus $f\colon A \to B$ on surjektio, jos ja vain jos $f(f^{-1}(B_0)) = B_0$ kaikilla $B_0 \subset B$.

5. Olkoon $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Todista induktiolla, että

$$2n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1) \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}_+.$$

6. Määritellään kuvaus $f\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ seuraavasti:

$$f(1) = 1; \quad f(n+1) = 2f(n), \text{ kun } n \in \mathbb{N}_+.$$

Määritä $f(n)$ kullakin $n \in \mathbb{N}_+$, ja perustele vastaus induktiolla. Määritä sitten summa

$$S_n = f(1) + \ldots + f(n)$$

kullakin $n \in \mathbb{N}_+$, ja perustele vastaus induktiolla.