Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Ylimääräinen harjoitus 12, 20.–24.4.2009

Ei lisäpisteitä! Ratkaisut luennoilla ja verkossa.

1. Olkoot H ja K äärellisen ryhmän G aliryhmiä niin, että $\mathrm{syt}(|H|, |K|) = 1$. Osoita, että $|H \cap K| = 1$.

2. Olkoon G (multiplikatiivinen) ryhmä, $H \leq G$ aliryhmä ja $N \trianglelefteq G$ normaali aliryhmä.

a) Harjoitustehtävässä 8:2 osoitettiin, että HN on G:n aliryhmä. Osoita, että $HN = \langle H \cup N \rangle$.

b) Oletetaan, että $H \cap N = \{1_G\}$ ja $\langle H \cup N \rangle = G$. Osoita, että tekijäryhmä G/N on isomorfinen H:n kanssa.

3. Olkoon $(A, +)$ Abelin ryhmä. Alkio $a \in A$ on *torsioalkio*, jos $\mathrm{ord}(a) < \infty$, ts. $na = 0$ jollain $n \in \mathbb{N}_+$. Osoita, että $T(A) = \{a \in A \mid a \text{ on torsioalkio}\}$ on A:n aliryhmä. Osoita vielä, että tekijäryhmässä $A/T(A)$ vain neutraalialkio on torsioalkio.

4. Osoita, että renkaan R *keskus* $C(R) = \{a \in R \mid ab = ba \text{ kaikilla } b \in R\}$ on R:n alirengas.

5. Olkoon R kommutatiivinen rengas. Kerrataan harjoitustehtävästä 9:5, että alkiota $a \in R$ sanotaan nilpotentiksi, jos $a^n = 0$ jollain $n \in \mathbb{N}_+$, ja harjoitustehtävästä 9:6, että $N(R) = \{a \in R \mid a \text{ on nilpotentti}\}$ on R:n ideaali. Määritä $N\big(R/N(R)\big)$.

6. Määritä renkaassa $\mathbb{Z}_7[x]$ polynomien $f = x^3 + 2x^2 + x + 1$ ja $g = x^2 + 5$ (jokin) suurin yhteinen tekijä ja esitä se muodossa $uf + vg$ joillain $u, v \in \mathbb{Z}_7[x]$.

7. Jaa alkutekijöihin polynomi $x^3 + 5x^2 + 5$ renkaassa $\mathbb{Z}_{11}[x]$ ja polynomi $x^4 + 1$ renkaassa $\mathbb{Z}_2[x]$.

8. Olkoon I polynomin x^3+x^2+1 virittämä renkaan $\mathbb{Z}_2[x]$ ideaali. Osoita, että tekijärengas $\mathbb{Z}_2[x]/I$ on 8-alkioinen kunta. Tutki sen struktuuria.