Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Harjoitus 11, 20.–24.4.2009

1. Osoita, että $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ on $\mathbb{R}$:n alikunta.

2. Kokonaisalueen R osamääräkunnalle $Q(R)$ ja injektiiviselle rengashomomorfismille $j\colon R \to Q(R)$, jolla R upotetaan $Q(R)$:n alirenkaaksi, todistettiin seuraava *universaalisuusominaisuus*: Jos K on kunta ja $f\colon R \to K$ injektiivinen rengashomomorfismi, niin on olemassa yksikäsitteinen kuntahomomorfismi $\overline{f}\colon Q(R) \to K$, jolla $\overline{f} \circ j = f$.

Osoita, että tämä universaalisuusominaisuus määrää parin $(Q(R), j)$ yksikäsitteisesti (yksikäsitteistä) kuntaisomorfismia vaille. Tarkemmin sanoen, osoita, että jos Q_k on kunta, $j_k\colon R \to Q_k$ on injektiivinen rengashomomorfismi ja parilla (Q_k, j_k) on sama universaalisuusominaisuus kuin parilla $(Q(R), j)$, kun $k = 1, 2$, niin on olemassa yksikäsitteinen kuntaisomorfismi $\varphi\colon Q_1 \to Q_2$, jolla $\varphi \circ j_1 = j_2$.

3. Laske $(1 + x)^6$ renkaissa $\mathbb{Z}_3[x]$ ja $\mathbb{Z}_5[x]$.

4. Olkoon $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$, jossa $n \geq 1$ ja $a_0 \neq 0 \neq a_n$. Todista: Jos $p/q \in \mathbb{Q}$ (siis $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$) on f:n nollakohta (kun f tulkitaan $\mathbb{Q}$-kertoimiseksi polynomiksi) ja $\mathrm{syt}(p, q) = 1$, niin p on a_0:n tekijä ja q on a_n:n tekijä.

5. Osoita, että polynomien 2 ja x yhdessä virittämä $\mathbb{Z}[x]$:n ideaali ei ole pääideaali.

6. Jaa jakokulmamenetelmällä renkaassa $\mathbb{Z}_5[x]$ polynomi $f = x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 2$ polynomilla $g = x^2 + 2x + 3$. Mikä on (vaillinainen) osamäärä ja mikä jakojäännös eli mitkä ovat polynomit q ja r, joilla $f = qg + r$ ja $\deg(r) < \deg(g)$? Tee sitten sama renkaassa $\mathbb{Z}[x]$ ja tutki tulosten yhteyttä. Määritä lopuksi jakokulmatta ratkaisu renkaassa $\mathbb{Z}_7[x]$.

Huom. Viimeisellä luento- ja laskuharjoitusviikolla 20.–24.4. on 12., **ylimääräiset harjoitukset**, joista ei tule lisäpisteitä ja joiden ratkaisut käsitellään luennoilla.