Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Harjoitus 10, 6.–8.4. ja 16.–17.4.2009

1. Olkoot I ja J renkaan R ideaaleja. Osoita, että myös

$$I + J = \{a + b \mid a \in I,\, b \in J\}$$

on R:n ideaali.

2. (Kompleksilukuja osaaville tai "kompleksilukujen pikakurssi".) Olkoon $R = \{m + ni \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ Gaussin kokonaislukujen joukko (i imaginääriyksikkö, $i^2 = -1$).

a) Osoita, että R on kompleksilukujen renkaan $\mathbb{C}$ alirengas.

b) Osoita, että R on pääideaalirengas eli että sen jokainen ideaali on muotoa $\langle a \rangle = Ra$ jollain $a \in R$. *Ohje.* Olkoon $I \neq \{0\}$ renkaan R ideaali. Lukujen $m + ni \in I \smallsetminus \{0\}$ itseisarvojen $|m + ni| = \sqrt{m^2 + n^2} > 0$ joukossa on selvästikin pienin eli jokin joukon $I \smallsetminus \{0\}$ alkio a on lähimpänä origoa. Osoita, että joukko Ra on kompleksitason erään neliöverkon kärkien joukko (piirrä!). Osoita, että jos $z \in I \smallsetminus Ra$, niin on olemassa $b \in Ra$, jolla $|b - z| < |a|$, ja johda tästä ristiriita.

3. a) Määritä renkaan $\mathbb{Z}$ ideaali $\langle 693, 714, 1925 \rangle$ eli etsi sille virittäjä.

b) Laske Eulerin φ-funktion arvo $\varphi(60)$.

4. Olkoon R kokonaisalue, jonka karakteristika $p = \mathrm{char}(R)$ on positiivinen. Osoita, että kuvaus $f\colon R \to R$, jolla $f(a) = a^p$ kaikilla $a \in R$, on injektiivinen rengashomomorfismi (summan säilyvyydestä ks. luennot). Mikä kuvaus f on, jos $R = \mathbb{Z}_p$?

5. Renkaan R ideaali I on *maksimaalinen*, jos $I \neq R$ ja jos jokaiselle R:n ideaalille J ehdosta $I \subset J$ seuraa, että $J = I$ tai $J = R$. Olkoon R kommutatiivinen rengas ja I sen ideaali. Osoita, että I on R:n maksimaalinen ideaali jos ja vain jos tekijärengas R/I on kunta.

6. Tarkastellaan verkossa olevan luentomateriaalin sivulla 94 kunnan määritelmän jälkeen esitettyä seuraavaa yritystä antaa kunnalle yhtäpitävä määritelmä (eli *luonnehdinta*, *karakterisointi*): Kolmikko $(K, +, \cdot)$, jossa K on joukko ja $+$ sekä $\cdot$ ovat K:n laskutoimituksia, on kunta, jos ja vain jos $(K, +)$ on Abelin ryhmä (olkoon 0 sen neutraalialkion merkintä), $(K \smallsetminus \{0\}, \cdot)$ on Abelin ryhmä ja $a(b + c) = ab + ac$ kaikilla $a, b, c \in K$. Kunta tietysti täyttää nämä ehdot.

a) Osoita, että käänteinen ei päde eli että ehdot täyttävä kolmikko $(K, +, \cdot)$ ei välttämättä ole kunta tarkastelemalla esimerkkiä, jossa $K = \{0, 1\}$ on joukko ($1 \neq 0$) laskutoimituksin $+$ ja $\cdot$, joilla $0 + 0 = 1 + 1 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, $0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$ ja $0 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$ (siis todellakin asetetaan $0 \cdot 1 = 1$).

b) Etsi alun ehtojen täydennykseksi niin suppea lisäehto kuin vain osaat saadaksesi luonnehdinnan kunnalle.