Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Harjoitus 1, 19.–23.1.2009

1. Asetetaan $A_{m,n} = \{xy \mid x, y \in \mathbb{N},\ m \le x \le n,\ m \le y \le n\}$, kun m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja ja $m \le n$. Määritä joukot $A_{3,5} \cup A_{2,4}$, $A_{3,5} \cap A_{2,4}$ ja $A_{3,5} \smallsetminus A_{2,4}$.

2. Olioiden x ja y *järjestetty pari* (x, y) määritellään asettamalla $(x, y) = \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}$. Osoita, että $(x, y) = (a, b)$, jos ja vain jos $x = a$ ja $y = b$.

3. Olkoot A, B ja C joukkoja. Todista *de Morganin kaavat*

$$A \smallsetminus (B \cup C) = (A \smallsetminus B) \cap (A \smallsetminus C) \quad \text{ja} \quad A \smallsetminus (B \cap C) = (A \smallsetminus B) \cup (A \smallsetminus C)$$

laatimalla näistä ainakin ensimmäistä varten totuustaulu.

4. Perhe $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ joukon E osajoukkoja on joukon E *peite*, jos jokainen E:n alkio kuuluu johonkin perheen $\mathcal{A}$ joukkoon eli jos $E = \bigcup \mathcal{A}$. Luettele kaikki joukon $E = \{1, 2\}$ peitteet.

5. Olkoon $A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x > n\}$, kun $n \in \mathbb{N}$, ja $B_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 - 1/n\}$, kun $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$. Osoita, että $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset$ ja $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n =]0, 1[$.

6. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaavan $f(x) = x^2 + 1$ $(x \in \mathbb{R})$ määrittelemä kuvaus ja $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$. Muodosta joukot $f^{-1}(f(A))$ ja $f(f^{-1}(A))$.