Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Erilliskoe to 28.1.2010

1. Osoita induktiolla, että $4^{2n} - 1$ on jaollinen luvulla 15 kullakin kokonaisluvulla $n \geq 1$.

2. Ratkaise yhtälöt $a \circ x = b$ ja $y \circ a = b$ ryhmässä S_4, kun

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Määritellään kokonaislukujen joukon $\mathbb{Z}$ ja rationaalilukujen joukon $\mathbb{Q}$ tulojoukossa $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ laskutoimitus $\circ$ asettamalla

$$(m, q) \circ (n, r) = (m + n, 2^n q + r).$$

(a) Osoita, että G on ryhmä laskutoimituksen $\circ$ suhteen.

(b) **(i)** Onko joukko $H = \{(m, 0) \in G \mid m \in \mathbb{Z}\}$ ryhmän G aliryhmä?

(ii) Onko joukko $K = \{(0, q) \in G \mid q \in \mathbb{Q}\}$ ryhmän G aliryhmä?

4. Olkoon $\mathbb{Q}$ rationaalilukujen kunta, X joukko ja $R = \mathbb{Q}^X$ kuvausten $f \colon X \to \mathbb{Q}$ kommutatiivinen rengas, laskutoimitukset siis pisteittäin määriteltyinä.

(a) Olkoon $A \subset X$ osajoukko ja

$$I_A = \{f \in R \mid f(x) = 0 \text{ kaikilla } x \in A\} \subset R,$$

joukossa A häviävien kuvausten $f \in R$ joukko. Osoita määritelmään nojautuen, että I_A on R:n ideaali.

(b) Osoita, että I_A on jopa R:n pääideaali eli muotoa Ra jollain $a \in R$.

(c) Osoita, että kääntäen jokainen R:n pääideaali on muotoa I_A jollain osajoukolla $A \subset X$.

5. Määritä polynomin $f = x^2 + 14 \in \mathbb{Z}_{15}[x]$ kaikki esitykset muotoa $f = (x + a)(x + b)$ joillain $a, b \in \mathbb{Z}_{15}$.