Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Erilliskoe ti 27.10.2009

1. Olkoot A, B ja C joukkoja ja $f\colon A \to B$ sekä $g\colon B \to C$ kuvauksia, joilla $g \circ f$ on surjektio.

a) Osoita, että g on aina surjektio.

b) Osoita esimerkillä, että f ei aina ole surjektio.

2. Ratkaise täydelleen $\mathbb{Z}_7$:ssä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 4x + 3y = 4. \end{cases}$$

Onko yhtälöryhmällä ratkaisuja $\mathbb{Z}_5$:ssä?

3. Olkoot G ja G' ryhmiä, $f\colon G \to G'$ ryhmähomomorfismi ja $H \leq G$ aliryhmä. Oletetaan, että $f(H) = G'$ ja $\mathrm{Ker}(f) \subset H$. Osoita, että $H = G$.

4. Olkoon R rengas, ja olkoon $Y_2(R)$ kaikkien R-kertoimisten 2-rivisten yläkolmiomatriisien

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad (a, b, c \in R,\ 0 = 0_R \in R)$$

joukko varustettuna matriisien tavanomaisilla yhteen- ja kertolaskuilla:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ 0 & c + c' \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix}.$$

Osoita, että $Y_2(R)$ on rengas todistamalla yksityiskohtaisesti, että renkaan kaikki aksioomat toteutuvat. (Tätä varten ei tosiaankaan tarvitse olettaa, että R olisi kommutatiivinen.)

5. Määritä Eukleideen algoritmilla rationaalikertoimisten polynomien

$$f = 2x^3 - x^2 - 18x + 9 \qquad \text{ja} \qquad g = x^3 - 7x - 6$$

suurin yhteinen tekijä $\mathrm{syt}(f, g)$, ja esitä se muodossa $uf + vg$ joillain $u, v \in \mathbb{Q}[x]$.