Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Erilliskoe to 13.8.2009

1. Olkoot A ja B joukkoja ja $f\colon A \to B$ sekä $g\colon B \to A$ kuvauksia, joille $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Osoita, että f on injektio ja g surjektio.

2. Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$ ja $\mathrm{syt}(a, b) = 1$. Osoita, että $\mathrm{syt}(a + b, a - b)$ on 1 tai 2 (kun suurin yhteinen tekijä vaaditaan positiiviseksi).

3. Tarkastellaan epätyhjän joukon X permutaatioryhmää eli bijektioiden $f\colon X \to X$ ryhmää $G = S_X$ laskutoimituksena kuvausten yhdistäminen. Kutsukaamme bijektiota $f\colon X \to X$ joukon X *kierroksi*, jos on olemassa f:stä riippuva piste $a_f \in X$, jolle $f(a_f) = a_f$ ja $f(x) \neq x$, kun $x \in X \setminus \{a_f\}$. Olkoon $K \subset G$ kaikkien X:n kiertojen joukko. Osoita, että joukon K virittämä G:n aliryhmä $\langle K \rangle$ on G:n normaali aliryhmä.

4. Olkoon R rengas, olkoon $R^{\mathbb{N}}$ kuvausten $f\colon \mathbb{N} \to R$ rengas, laskutoimitukset siis pisteittäin määriteltyinä, ja olkoon $I \subset R^{\mathbb{N}}$ niiden kuvausten $f \in R^{\mathbb{N}}$ joukko, joille on olemassa sellainen f:stä riippuva luku $n_f \in \mathbb{N}$, että $f(n) = 0$, kun $n \in \mathbb{N}$ ja $n \geq n_f$. Osoita, että I on renkaan $R^{\mathbb{N}}$ ideaali.

5. Määritä ne positiiviset kokonaisluvut n, joilla $\mathbb{Z}_n$-kertoimisten polynomien renkaassa $\mathbb{Z}_n[x]$ polynomi $x^5 - 10x + 12$ on jaollinen polynomilla $x^2 + 2$.