Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Erilliskoe ti 12.5.2009

1. Ajatellaan kokonaisluvut määritellyiksi luonnollisten lukujen *muodollisina* (eli merkittyinä, ei siis vielä "suoritettavina") erotuksina $m - n$, joille on asetettu identtisyysehto

$$m - n = p - q \Longleftrightarrow m + q = n + p.$$

a) Osoita, että tämä symbolilla $=$ merkitty relaatio on todellisuudessa (vain) ekvivalenssi luonnollisten lukujen muodollisten erotusten joukossa.

b) Millä kaavoilla kokonaislukujen yhteenlasku ja kertolasku nyt määritellään luonnollisten lukujen yhteen- ja kertolaskujen avulla? (Ajattele $\mathbb{Z}$:n laskusääntöjen nojalla, minkälaiset kaavojen on oltava.)

c) Osoita, että tämä kokonaislukujen yhteenlasku on hyvinmääritelty: jos yhteenlaskettavat erotukset vaihdetaan näiden kanssa identtisiin erotuksiin, niin yhteenlaskun tulokseksi saatava erotus on identtinen alkuperäisen yhteenlaskun tuloksen kanssa.

2. Olkoon G (multiplikatiivinen) ryhmä ja H, K sekä L ryhmän G äärellisiä aliryhmiä, joiden kertaluvut eli alkioiden lukumäärät ovat $|H| = 15$, $|K| = 21$ ja $|L| = 35$. Osoita, että $H \cap K \cap L = \{1_G\}$.

3. Olkoon $G = S_{\mathbb{N}}$ luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$ permutaatioryhmä eli bijektioiden $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ joukko laskutoimituksena kuvausten yhdistäminen. Kutsukaamme bijektiota $f \in G$ *melkein identtiseksi*, jos jollekin luvulle $m_f \in \mathbb{N}$ pätee, että $f(n) = n$, kun $n \geq m_f$. Olkoon H melkein identtisten bijektioiden $f \in G$ joukko. Osoita, että H on G:n normaali aliryhmä.

4. Olkoon R rengas, ja olkoon $Y_2(R)$ kaikkien R-kertoimisten 2-rivisten yläkolmiomatriisien $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ $(a, b, c \in R,\ 0 = 0_R)$ joukko varustettuna matriisien tavanomaisilla yhteen- ja kertolaskuilla:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ 0 & c + c' \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix}.$$

Pidetään tunnettuna, että tällöin $Y_2(R)$ on rengas (tämä voidaan todistaa aivan kuten $\mathbb{R}$-kertoimisten matriisien tapauksessa; ei todellakaan tarvitse olettaa, että rengas R olisi kommutatiivinen). Osoita nyt, että joukko $J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in R \right\} \subset Y_2(R)$ on renkaan $Y_2(R)$ ideaali ja että tekijärengas $Y_2(R)/J$ on isomorfinen tulorenkaan $R \times R$ kanssa; anna myös tämä isomorfismi. **Ohje.** Sovella renkaiden homomorfialausetta kuvaukseen $f \colon Y_2(R) \to R \times R$, jolla $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto (a, c)$.

5. Esitä polynomi $f = x^4 - 5x^3 + x^2 - 2x - 15$ renkaassa $\mathbb{Q}[x]$ jaottomien polynomien tulona.