Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Erilliskoe to 11.6.2009

1. Määritellään kuvaus $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ asettamalla $f(0) = 1$ sekä kullakin $n \in \mathbb{N}$ rekursiivisesti

$$f(n+1) = \begin{cases} f(n)/2, & \text{jos } f(n) \text{ on parillinen;} \\ 5f(n)+1, & \text{jos } f(n) \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Osoita, että $f(n+7) = f(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja määritä f:n kuvajoukko $f(\mathbb{N})$.

2. Käyttämällä Eukleideen algoritmia **a)** osoita, että luvut 725 ja 147 ovat keskenään jaottomat, ja **b)** etsi kokonaisluvut x ja y, joilla $725x + 147y = 1$.

3. Olkoon G multiplikatiivinen ryhmä. Määritä ne parit $(a, b) \in G \times G$, joilla kuvaus $f : G \to G$, jolla $f(x) = axb$ kaikilla $x \in G$, on ryhmähomomorfismi.

4. Olkoon R rengas. Määritä ne parit $(a, b) \in R \times R$, joilla kuvaus $f : R \to R$, jolla $f(x) = axb$ kaikilla $x \in R$, on rengashomomorfismi. **Vihje ja varoitus.** Tulos on samantapainen kuin ryhmille tehtävässä 3, mutta todistus on juonikkaampi.

5. Palautetaan mieleen, että jos $n \in \mathbb{N}_+$, niin kokonaislukujen jäännösluokkien modulo n joukko $\mathbb{Z}_n$ on rengas luonnollisten laskutoimitustensa suhteen.

a) Määritä renkaan $\mathbb{Z}_9$ kääntyvien alkioiden multiplikatiivisen ryhmän $G = \mathbb{Z}_9^*$ alkiot ja kertotaulukko.

b) Osoita, että G on syklinen ryhmä, ja anna sopivalla $n \in \mathbb{N}_+$ jokin ryhmäisomorfismi additiiviselta ryhmältä $\mathbb{Z}_n$ ryhmälle G.

c) Määritä G:n kunkin alkion virittämä G:n aliryhmä.