Algebra I, erilliskoe ti 27.10.2009, ratk. (Jouni Luukkainen), 2 sivua

1. Olkoot A, B ja C joukkoja ja $f\colon A \to B$ sekä $g\colon B \to C$ kuvauksia, joilla $g \circ f$ on surjektio.

a) Osoita, että g on aina surjektio.

b) Osoita esimerkillä, että f ei aina ole surjektio.

Ratk. a) Jos $z \in C$, niin $z = (g \circ f)(x)$ jollain $x \in A$, jolloin $y = f(x) \in B$ ja $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$. Siis g on surjektio.

b) Jos esimerkiksi $A = \{0\} \subset \mathbb{N}$, $B = \{1, 2\} \subset \mathbb{N}$, $C = \{3\} \subset \mathbb{N}$, $f\colon A \to B$ on kuvaus $0 \mapsto 1$ ja $g\colon B \to C$ on kuvaus $x \mapsto 3$, niin $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 3$, joten $g \circ f$ on surjektio, mutta koska $2 \in B \setminus f(A)$, niin f ei ole surjektio.

2. Ratkaise täydelleen $\mathbb{Z}_7$:ssä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 4x + 3y = 4. \end{cases}$$

Onko yhtälöryhmällä ratkaisuja $\mathbb{Z}_5$:ssä?

Ratk. Koska 7 ja 5 ovat alkulukuja, ovat $\mathbb{Z}_7$ ja $\mathbb{Z}_5$ kuntia ja erityisesti siis supistussääntö pätee niissä. Lisäämällä ensimmäinen yhtälö (-4):llä kerrottuna toiseen yhtälöön saadaan yhtäpitävä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y &= 4 \\ \quad - 5y &= -12 \end{cases}.$$

Nyt $\mathbb{Z}_7$:ssä on $-5y = -12 \iff 5y = 12 = 5 \iff y = 1$, jolloin $x + 2y = 4 \iff x = 4 - 2y = 2$. Siis yhtälöryhmän (yksikäsitteinen) ratkaisu $\mathbb{Z}_7$:ssä on

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Laskemalla alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälöt puolittain yhteen saadaan yhtälö $5x + 5y = 8$, joka $\mathbb{Z}_5$:ssä saa muodon $0 = 3$, joka taas ei päde. Siis yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja $\mathbb{Z}_5$:ssä.

3. Olkoot G ja G' ryhmiä, $f\colon G \to G'$ ryhmähomomorfismi ja $H \leq G$ aliryhmä. Oletetaan, että $f(H) = G'$ ja $\mathrm{Ker}(f) \subset H$. Osoita, että $H = G$.

Ratk. Olkoon $a \in G$. Pitää osoittaa, että $a \in H$. Nyt $b = f(a) \in G' = f(H)$, joten $b = f(h)$ jollain $h \in H$. Siis $f(ah^{-1}) = f(a)f(h)^{-1} = bf(h)^{-1} = 1_{G'}$, joten $h_1 = ah^{-1} \in \mathrm{Ker}(f) \subset H$. Täten $a = h_1 h \in H$.

4. Olkoon R rengas, ja olkoon $Y_2(R)$ kaikkien R-kertoimisten 2-rivisten yläkolmiomatriisien

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad (a, b, c \in R,\ 0 = 0_R \in R)$$

joukko varustettuna matriisien tavanomaisilla yhteen- ja kertolaskuilla:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ 0 & c + c' \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix}.$$

Osoita, että $Y_2(R)$ on rengas todistamalla yksityiskohtaisesti, että renkaan kaikki aksioomat toteutuvat. (Tätä varten ei tosiaankaan tarvitse olettaa, että R olisi kommutatiivinen.)

Ratk. Olkoon $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in Y_2(R)$, $\alpha' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in Y_2(R)$ ja $\alpha'' = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ 0 & c'' \end{pmatrix} \in Y_2(R)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
(\alpha + \alpha') + \alpha'' &= \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & c+c' \end{pmatrix} + \alpha'' = \begin{pmatrix} (a+a')+a'' & (b+b')+b'' \\ 0 & (c+c')+c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+(a'+a'') & b+(b'+b'') \\ 0 & c+(c'+c'') \end{pmatrix} \\
&= \alpha + \begin{pmatrix} a'+a'' & b'+b'' \\ 0 & c'+c'' \end{pmatrix} = \alpha + (\alpha' + \alpha''); \\
\alpha + \alpha' &= \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & c+c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'+a & b'+b \\ 0 & c'+c \end{pmatrix} = \alpha' + \alpha; \\
\alpha + 0_2 &= \begin{pmatrix} a+0 & b+0 \\ 0 & c+0 \end{pmatrix} = \alpha \ (= 0_2 + \alpha), \quad \text{kun määritellään } 0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Y_2(R); \\
\alpha + \alpha' &= 0_2 \ (= \alpha' + \alpha), \quad \text{kun valitaan } \alpha' = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & -c \end{pmatrix} \in Y_2(R); \\
(\alpha\alpha')\alpha'' &= \begin{pmatrix} aa' & ab'+bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ 0 & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (aa')a'' & (aa')b''+(ab'+bc')c'' \\ 0 & (cc')c'' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a(a'a'') & a(a'b''+b'c'')+b(c'c'') \\ 0 & c(c'c'') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'a'' & a'b''+b'c'' \\ 0 & c'c'' \end{pmatrix} = \alpha(\alpha'\alpha''); \\
\alpha(\alpha' + \alpha'') &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'+a'' & b'+b'' \\ 0 & c'+c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a'+a'') & a(b'+b'')+b(c'+c'') \\ 0 & c(c'+c'') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} aa'+aa'' & (ab'+bc')+(ab''+bc'') \\ 0 & cc'+cc'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab'+bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} aa'' & ab''+bc'' \\ 0 & cc'' \end{pmatrix} \\
&= \alpha\alpha' + \alpha\alpha''; \\
(\alpha + \alpha')\alpha'' &= \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & c+c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ 0 & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+a')a'' & (a+a')b''+(b+b')c'' \\ 0 & (c+c')c'' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} aa''+a'a'' & (ab''+bc'')+(a'b''+b'c'') \\ 0 & cc''+c'c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'' & ab''+bc'' \\ 0 & cc'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'a'' & a'b''+b'c'' \\ 0 & c'c'' \end{pmatrix} \\
&= \alpha\alpha'' + \alpha'\alpha''; \\
\alpha 1_2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 1 & a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ 0 & c \cdot 1 \end{pmatrix} = \alpha = \begin{pmatrix} 1 \cdot a & 1 \cdot b + 0 \cdot c \\ 0 & 1 \cdot c \end{pmatrix} = 1_2 \alpha, \\
&\quad \text{kun määritellään } 1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Y_2(R) \ (1 = 1_R).
\end{aligned}$$

5. Määritä Eukleideen algoritmilla rationaalikertoimisten polynomien $f = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$ ja $g = x^3 - 7x - 6$ suurin yhteinen tekijä $\mathrm{syt}(f, g)$, ja esitä se muodossa $uf + vg$ joillain $u, v \in \mathbb{Q}[x]$.

Ratk. Jakokulmassa jakamalla tai suorempaakin saadaan

$$\begin{aligned}
2x^3 - x^2 - 18x + 9 &= 2(x^3 - 7x - 6) + (-x^2 - 4x + 21); \\
x^3 - 7x - 6 &= (-x + 4)(-x^2 - 4x + 21) + (30x - 90); \\
-x^2 - 4x + 21 &= (1/30)(-x - 7)(30x - 90).
\end{aligned}$$

Siis $\mathrm{syt}(f, g) = k(30x - 90)$, kun $k \in \mathbb{Q}$, $k \neq 0$. Pääpolynomiesitys $\mathrm{syt}(f, g) = x - 3$ on yksikäsitteinen. Nyt tulee

$$\begin{aligned}
30x - 90 &= (x^3 - 7x - 6) - (-x + 4)(-x^2 - 4x + 21) \\
&= (x^3 - 7x - 6) + (x - 4)(((2x^3 - x^2 - 18x + 9) - 2(x^3 - 7x - 6)) \\
&= (x - 4)f + (-2x + 9)g.
\end{aligned}$$