II.7 Ekvivalenssirelaatiot ja ositukset

Määr.: Joukon A relaatio E on ekvivalenssi (-relaatio), jos kaikilla $x, y, z \in A$ on

i) xEx (refleksiivisyys)
ii) $xEy \Rightarrow yEx$ (symmetrisyys)
iii) xEy ja $yEz \Rightarrow xEz$ (transitiivisuus).

Ekv.-relaatiota merk. usein $\sim$ tms.

Esim.: a) A:n id. relaatio on ekv. (tässä $xEy \Leftrightarrow x=y$), samoin A:n kaikkinen relaatio (xEy $\forall x, y \in A$).

b) Määr. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:ssä relaatio E asettamalla

$$(m,n)\,E\,(m',n') \Leftrightarrow m+n' = n+m' \qquad (m,n,m',n' \in \mathbb{N}).$$

V. E on ekvivalenssi $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:ssä.
T. i) Aina $(m,n)E(m,n)$, koska $m+n = n+m$.
ii) $(m,n)E(m',n') \Rightarrow m+n' = n+m'$
$\Rightarrow m'+n = n'+m \Rightarrow (m',n')E(m,n)$.
iii) $(m,n)E(m',n')$ ja $(m',n')E(m'',n'') \Rightarrow m+n'=n+m'$ ja $m'+n'' = n'+m'' \Rightarrow m+n''+n' = m+n'+n'' =$
$= n+m'+n'' = n+n'+m'' = n+m''+n'$;
supistussääntö $\Rightarrow m+n'' = n+m''$ eli $(m,n)E(m'',n'')$. $\square$

Määr.: Ol. E ekv. rel. joukossa A. Alkion $x \in A$ ekvivalenssiluokka ekvivalenssissa E on A:n osajoukko

$$E(x) = \{y \in A \mid yEx\} \quad (\text{monisteessa merk. } [x]).$$

Jokainen $y \in E(x)$ on luokan $E(x)$ edustaja. Kaikkien ekv. luokkien joukkoa merkitään

$$A/E = \{E(x) \mid x \in A\} \subset \mathcal{P}(A).$$

Lemma: Ol. E ekv. rel. A:ssa ja $x, y \in A$. Silloin:

i) $x \in E(x)$.

ii) Seur. ehdot ovat yhtäpitävät:
a) $x \in E(y)$
b) $x E y$
c) $E(x) = E(y)$
d) x ja y kuuluvat samaan ekv. luokkaan.
iii) joko $E(x) = E(y)$ tai $E(x) \cap E(y) = \emptyset$.

Tod.: i) E refl. $\Rightarrow x E x \Rightarrow x \in E(x)$.
ii) a) $\Rightarrow$ b). $E(y)$:n määr. mukaan.
b) $\Rightarrow$ c). Ol. $x E y$. Jos $z \in E(x)$, niin $z E x$; transit. $\Rightarrow z E y \Rightarrow z \in E(y)$. $\therefore E(x) \subset E(y)$.
Symm. $\Rightarrow y E x$; jo todistettu $\Rightarrow E(y) \subset E(x)$.
c) $\Rightarrow$ d). $x \in E(x) = E(y) \ni y$.
d) $\Rightarrow$ a). Ol. $x \in E(z)$, $y \in E(z)$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x E z \\ y E z \xrightarrow{\text{symm.}} z E y \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{transit.}} x E y \Rightarrow x \in E(y).$$

iii) Ol. $E(x) \cap E(y) \neq \emptyset$; osoitettava, että $E(x) = E(y)$.
Val. $z \in E(x) \cap E(y)$. ii):n mukn. $z \in E(x) \Rightarrow E(z) = E(x)$ ja $z \in E(y) \Rightarrow E(z) = E(y)$. $\therefore E(x) = E(z) = E(y)$. $\square$

Olk. E ekv. rel. A:ssa ja $D \subset A$ osajoukko, joka sisältää täsm. yhden alkion (edustajan) jokaisesta ekv. luokasta (ts. D on ekv. luokkien (eräs) <u>edustajisto</u>). Tällöin siis

$$A/E = \{E(x) \mid x \in A\} = \{E(x) \mid x \in D\},$$

ja pätee

<u>Lause 15.</u>: Yo. tilanteessa $A = \bigcup_{x \in D} E(x)$ ja $E(x) \cap E(y) = \emptyset$, kun $x, y \in D$, $x \neq y$.

Tod.: $a \in A \xrightarrow{\text{Le, i)}} a \in E(a) = E(x)$ eräällä $x \in D$; siis $A = \bigcup_{x \in D} E(x)$.
$x, y \in D$, $x \neq y \Rightarrow E(x) \neq E(y)$; Le, iii) $\Rightarrow E(x) \cap E(y) = \emptyset$. $\square$

<u>Esim.</u>: a) E A:n kaikkien rel. $\Rightarrow A/E = \{A\}$
($E(x) = \{y \in A \mid y E x\} = A \quad \forall x \in A$).
E A:n id. relaatio $\Rightarrow A/E = \{\{x\} \mid x \in A\}$.

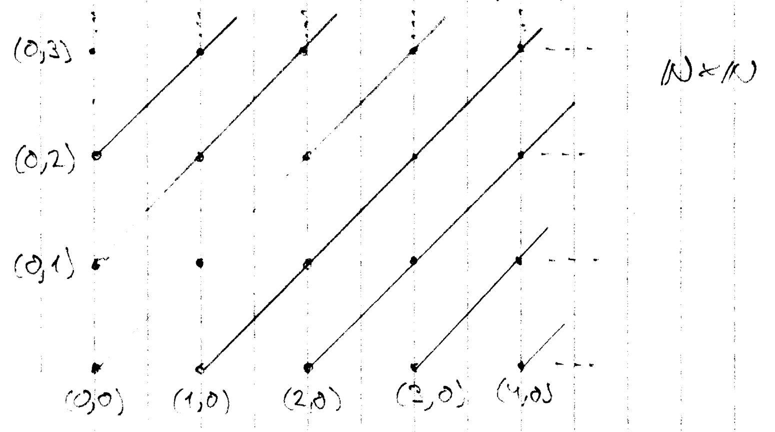
b) Tark. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:n ekvivalenssia E, jossa $(m,n)E(m',n')$ $\Leftrightarrow$ $m+n' = n+m'$. Merk. $[m,n]$ = alkion $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ekv. luokka.

1) jos $m \geq n$, niin $\exists$ 1-käs. $p\in\mathbb{N}$ s.e. $m = n+p$
$\Rightarrow$ $(m,n)E(p,0)$ $\Rightarrow$ $[m,n] = [p,0]$.

2) jos $m<n$, niin $\exists$ 1-käs. $q\in\mathbb{N}_+$ s.e. $n=m+q$
$\Rightarrow$ $(m,n)E(0,q)$ $\Rightarrow$ $[m,n] = [0,q]$.

$$\therefore \quad (\mathbb{N}\times\mathbb{N})/E = \{[p,0] \mid p\in\mathbb{N}\} \cup \{[0,q] \mid q\in\mathbb{N}_+\},$$

ja tässä luettelossa jokainen ekv. luokka esiintyy tasan yhden kerran (esim. $[p,0] \neq [0,q]$, kun $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}_+$, sillä $[p,0] = [0,q]$ $\Rightarrow$ $p+q = 0+0 = 0$ $\Rightarrow$ $p=q=0$).



$([p,0] = \{(n+p,n) \mid n\in\mathbb{N}\}$ jne.$)$.

Määr.: joukko $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(A)\setminus\{\emptyset\}$ joukon A epätyhjiä osajoukkoja on A:n ositus, jos

i) $\cup\mathcal{O} = A$, ja
ii) $\mathcal{O}$:n joukot ovat erillisiä, t.s.
$O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 = O_2$ tai $O_1\cap O_2 = \emptyset$.

Siis yllä $\mathcal{O}$ on A:n ositus $\Leftrightarrow$ jokainen $x\in A$ kuuluu tasan yhteen joukkoon $O\in\mathcal{O}$.

Seuraus: E A:n ekvivalenssirel. $\Rightarrow$
A/E on A:n ositus. □

Lause 16: Olkoon $f: A\to B$ kuvaus. Silloin

$$\mathcal{O}_f = \{f^{-1}(\{y\}) \mid y\in f(A)\}$$

on A:n ositus. Kääntäen, jokainen A:n ositus on muotoa O_f sopivilla B, f.

Tod.: Kun $x \in A$, $y = f(x) \in f(A)$, on $\{x\} \subset f^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}(\{y\}) \in O_f$, joten $\bigcup O_f = A$ ja $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ $\forall y \in f(A)$. Lisäksi $f^{-1}(\{y_1\}) \cap f^{-1}(\{y_2\}) = \emptyset$, kun $y_1, y_2 \in f(A)$, $y_1 \neq y_2$; nimittäin $x \in f^{-1}(\{y_1\}) \cap f^{-1}(\{y_2\})$ $\Rightarrow$ $y_1 = f(x) = y_2$.

$\therefore$ O_f on A:n ositus.

Kääntäen, olk. $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ A:n mieliv. ositus. Määr. $g : A \to \mathcal{O}$ s.e. kaikilla $x \in A$ $g(x) =$ se 1-käs. joukko $O \in \mathcal{O}$, jolla $x \in O$. Tällöin g on surjektio ($O \neq \emptyset$ $\forall O \in \mathcal{O}$), ja $x \in O \Leftrightarrow g(x) = O$, joten $g^{-1}(\{O\}) = O$ $\forall O \in \mathcal{O}$.

$\therefore$ $O_g = \{ g^{-1}(\{O\}) \mid O \in \mathcal{O} \} = \{ O \mid O \in \mathcal{O} \} = \mathcal{O}$. □

Yllä $g : A \to \mathcal{O}$ on A:n ositukseen $\mathcal{O}$ liittyvä <u>kanoninen surjektio</u>.

<u>Lause 17</u>: Jos $\mathcal{O}$ on joukon A ositus, niin

$$E_{\mathcal{O}} = \{ (x,y) \in A \times A \mid \exists O \in \mathcal{O} \text{ s.e. } x, y \in O \}$$

on A:n ekvivalenssirelaatio. Kuvaus $\mathcal{O} \mapsto E_{\mathcal{O}}$ on bijektio

$$\{\text{A:n ositukset}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{A:n ekv.relaatiot}\}.$$

Tod.: Olk. $g : A \to \mathcal{O}$ kan. surjektio. Kun $x, y \in A$, on $(x,y) \in E_{\mathcal{O}} \Leftrightarrow g(x) = g(y)$ ($\Leftarrow$: $x \in g(x) = g(y) \ni y$; $\Rightarrow$: $x, y \in O \in \mathcal{O} \Rightarrow g(x) = O = g(y)$).
Tästä nähdään selvästi, että $E_{\mathcal{O}}$ on ekv..

E A:n jokin ekv. $\Rightarrow$ $E_{(A/E)} = E$, sillä $(x,y) \in E_{(A/E)} \Leftrightarrow x, y$ samassa E-ekv.luokassa $\Leftrightarrow (x,y) \in E$.

$\mathcal{O}$ A:n ositus $\Rightarrow$ $A/(E_{\mathcal{O}}) = \{ E_{\mathcal{O}}(x) \mid x \in A \} = \mathcal{O}$, sillä $y \in E_{\mathcal{O}}(x) \Leftrightarrow g(y) = g(x) \Leftrightarrow y \in g^{-1}(\{g(x)\}) = g(x) \in \mathcal{O}$, ts. $E_{\mathcal{O}}(x) = g(x) \in \mathcal{O}$ $\forall x \in A$.

$\therefore$ $E \mapsto A/E$ on $[\mathcal{O} \mapsto E_{\mathcal{O}}]$:n käänt.kuvaus. □

<u>Esim.</u>: Kuvaukseen $f : A \to B$ liittyy A:n ekv.rel. $E(O_f)$; $(x,y) \in E(O_f) \Leftrightarrow \exists b \in f(A)$ s.e. $x, y \in f^{-1}(\{b\}) \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.
Tässä $E(O_f)(x) = f^{-1}(\{f(x)\})$ $\forall x \in A$.