Joukoilla $A, B$ merk. $A \cong B$, jos on olem. bijektio $A \xrightarrow{\sim} B$ (ts. $A$ ja $B$ ovat "yhtä mahtavat"). Tällöin myös $B \cong A$ ($f$ bij. $\Rightarrow$ $f^{-1}$ myös bij.).

Merk. $J_0 = \emptyset$, ja $J_n = \{k \in \mathbb{N}_+ \mid k \leq n\} = \{1, 2, \dots, n\}$, kun $n \in \mathbb{N}_+$.

<u>Määr.</u>: Joukko $A$ on <u>äärellinen</u>, jos $A \cong J_n$ jollakin $n \in \mathbb{N}$. Muussa tapauksessa $A$ on <u>ääretön</u>.

<u>Huom.</u>: a) $\emptyset$ on äärellinen $(n=0)$.
b) $f : J_n \to A$ bij., $n \in \mathbb{N}_+$ $\Rightarrow$ $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, missä $x_k = f(k)$ $\forall k \in \mathbb{N}_+$ ja $x_k \neq x_l$, kun $k \neq l$.

<u>Lemma 1'</u>: Kun $n, m \in \mathbb{N}$ ja $m > n$, ei ole olem. injektiota $J_m \to J_n$.

Tod.: Induktio $n$:n suhteen.
a) $n = 0$: $J_0 = \emptyset$, $J_m \neq \emptyset$, kun $m > 0$ $\Rightarrow$ ei ole olem. injektiota (eikä mitään kuvausta) $J_m \to J_0$, kun $m > 0$.
b) Induktio-oletus: $n \in \mathbb{N}$ ja millään $m > n$ ei olem. injektiota $J_m \to J_n$.
Vastaoletus: $\exists\, p \in \mathbb{N}$, $p > n+1$, ja injektio $f : J_p \to J_{n+1}$. $p > n+1 \Rightarrow p-1 > n$.
Merk. $q = f(p) \in J_{n+1}$, ja tark. kuvauksia

$$\begin{array}{lcl}
J_p & = & \{1, 2, \dots\dots, p\} \\
\big\downarrow f & & \\
J_{n+1} & = & \{1, 2, \dots, q, \dots, n+1\} \\
\big\downarrow t & & \\
J_{n+1} & = & \{1, 2, \dots, q, \dots, n+1\}
\end{array} \qquad g = t \circ f$$

$$t(i) = \begin{cases} q, & \text{kun } i = n+1 \\ n+1, & \text{kun } i = q \\ i & \text{muulloin} \end{cases}$$

($t$ "vaihtaa" $q$:n ja $(n+1)$:n; $t = id$, jos $q = n+1$).

$t \circ t = id_{J_{n+1}}$ $\Rightarrow$ $t$ on bijektio $(t^{-1} = t)$, eril. injektio
$\Rightarrow$ $g = t \circ f : J_p \to J_{n+1}$ injektio (kahden inj. yhd.).

$g(p) = t(f(p)) = t(q) = n+1$, $g$ inj. $\Rightarrow$
$g(i) \neq n+1$, kun $i \in J_{p-1}$ $\Rightarrow$ $g(i) \in J_n$ $\forall i \in J_{p-1}$,
ja saad. kuvaus $h: J_{p-1} \to J_n$, $h(i) = g(i)$ $\forall i \in J_{p-1}$.
$g$ inj. $\Rightarrow$ $h$ inj.; mutta ind. ol. $\Rightarrow$
$\nexists$ inj. $J_{p-1} \to J_n$, RR.
$\therefore$ Ei ole olem. inj. $J_m \to J_{n+1}$ millään $m > n+1$. $\square$

<u>Lause 7</u>: $A$ äärell. $\Rightarrow$ $A \cong J_n$ täsm. yhdellä $n \in \mathbb{N}$.

Tod.: $f: A \xrightarrow{\sim} J_n$, $g: A \xrightarrow{\sim} J_m$ bijektioita $\Rightarrow$
$f \circ g^{-1}: J_m \to A \to J_n$ bijektio, siis myös injektio;
Le 1') $\Rightarrow$ ei ole $m > n$, vaan $m \leq n$. Vastaavasti $n \leq m$. $\therefore$ $m = n$. $\square$

Ed. lauseessa $n \in \mathbb{N}$ on äärell. joukon $A$ <u>alkioiden lukumäärä</u>, merk. $n = \#A$.
Selvästi $\#A = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$, ja $\#J_n = n$ ($id: J_n \xrightarrow{\sim} J_n$).

<u>Lause 11</u>: $A$ äärell., $A \cong B$ $\Rightarrow$ $B$ on äärell. ja $\#B = \#A$.

Tod.: $f: A \to J_n$, $g: A \to B$ bij. $\Rightarrow$
$f \circ g^{-1}: B \to J_n$ bij. $\square$

<u>Lause 8</u>: $A$ äärell., $B \subsetneq A$
$\Rightarrow$ $B$ äärell. ja $\#B < \#A$.

Ensin erikoistapaus:

<u>Lemma 2</u>: $n \in \mathbb{N}$, $C \subsetneq J_n$ $\Rightarrow$ $C$ äärell. ja $\#C < n$.

Tod.: Induktio $n$:n suhteen. Tapaus $n = 0$ on selvä (joilla ei aitoja osajoukkoja).
Ind. ol.: Väite pätee erällä $n \in \mathbb{N}$. Olk. sitten $C \subsetneq J_{n+1}$. Silloin $\exists\, q \in J_{n+1} \setminus C$. Merk.
$t: J_{n+1} \xrightarrow{\sim} J_{n+1}$ kuten Le 1':n todistuksessa ($t(q) = n+1$, $t(n+1) = q$, $t(i) = i$ muulloin). $q \notin C$ $\Rightarrow$
$n+1 = t(q) \notin t(C)$ $\Rightarrow$ $t(C) \subset J_n$. 2 mahd.:
1) $t(C) = J_n$; tällöin $t(C)$ on äärell. ja $\#t(C) = n$.
2) $t(C) \subsetneq J_n$; ind. ol. $\Rightarrow$ $t(C)$ äärell. ja $\#t(C) < n$.

joka tap. $t(C)$ äärell. ja $\# t(C) \le n$.
Koska $C \cong t(C)$, Lause 11 $\Rightarrow$ $C$ äärell. ja
$\# C = \# t(C) \le n < n+1$. $\square$

Lauseen 8 tod.: $A$ äärell. $\Rightarrow$ $\exists$ bij. $f: A \xrightarrow{\sim} J_n$, missä $n = \# A \in \mathbb{N}$. $B \subsetneq A$ $\Rightarrow$ $f(B) \subsetneq J_n$;
Le 2 $\Rightarrow$ $f(B)$ äärell. ja $\# f(B) < n = \# A$.
Koska $B \cong f(B)$, Lause 11 $\Rightarrow$ $B$ on äärell. ja
$\# B = \# f(B) < \# A$. $\square$

<u>Lause 10</u>: $A, B$ äärell. $\Rightarrow$ $A \cup B$ ja $A \cap B$ äärell. ja

$$\#(A \cup B) = \# A + \# B - \#(A \cap B).$$

Tod: a) <u>Erikoistap.</u> $A \cap B = \emptyset$, $\#(A \cap B) = 0$.
Olk. $f: A \xrightarrow{\sim} J_m$, $g: B \xrightarrow{\sim} J_n$ bij. ($m = \# A$, $n = \# B$)
Määr. kuvaus $h: A \cup B \to J_{m+n}$ asettamalla

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \in J_m \subset J_{m+n}, & \text{kun } x \in A \\ m + g(x) \in \{m+k \mid k \in J_n\} \subset J_{m+n}, & \text{kun } x \in B \end{cases}$$

(tämä onnistuu, sillä nyt $x \in A \cup B \Rightarrow$ joko $x \in A$ tai $x \in B$).
Koska $J_m \cap \{m+k \mid k \in J_n\} = \emptyset$, $h$ on (melko selvästi) bijektio. $\therefore$ $A \cup B$ äärell., $\#(A \cup B) = \# A + \# B$.

b) <u>Yleinen tapaus</u>. Koska $A \setminus B \subset A \supset A \cap B$ ja $A$ on äärell., Lause 8 $\Rightarrow$ $A \setminus B$, $A \cap B$ äärell..
Koska $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ ja $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$,
a) $\Rightarrow$ $\# A = \#(A \setminus B) + \#(A \cap B)$.
Koska $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ ja $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$,
a) $\Rightarrow$ $A \cup B$ on äärell. ja $\#(A \cup B) = \#(A \setminus B) + \# B =$
$= \# A - \#(A \cap B) + \# B$. $\square$

Tutkitaan $\mathbb{N}$:n äärell. osajoukkoja:

<u>Lemma 3</u>: $A \subset \mathbb{N}$ äärell., $\# A = m \ge 1$
$\Rightarrow$ $A$:lla on esitys $A = \{a_i \mid i \in J_m\}$,
missä $a_i < a_{i+1}$ $\forall i \in J_{m-1}$
(siis $i \mapsto a_i$ on aid. kasvava bijektio $J_m \xrightarrow{\sim} A$).

Tod.: Induktio $m$:n suhteen. Tap. $m = 1$ selvä ($A = \{a_1\}$).

Ind. ol.: $m \in \mathbb{N}_+$ ja väite pätee äärell. joukoille $B \subset \mathbb{N}$, joilla $\#B = m$.
Olk. $A \subset \mathbb{N}$, $\#A = m+1$. Merk. $a_1 \in A$ A:n pienin alkio, $B = A \setminus \{a_1\}$. Lause 10 $\Rightarrow$ $\#B = m$.
Ind. ol. $\Rightarrow$ $\exists$ esitys $B = \{b_i \mid i \in J_m\}$, $b_i < b_{i+1}$ $\forall i \in J_{m-1}$.
Merk. $a_i = b_{i-1}$, kun $2 \le i \le m+1$ $\Rightarrow$
$A = \{a_i \mid i \in J_{m+1}\}$ vaadittu esitys A:lle. $\square$

<u>Lause 9</u>: Osajoukko $A \subset \mathbb{N}$ on äärellinen $\Leftrightarrow$ A on (ylhäältä) rajoitettu, ts. $\exists n \in \mathbb{N}$ s.e. $k \le n$ $\forall k \in A$ (eli $A \subset \{0\} \cup J_n$).

Tod.: $\underline{\Leftarrow}$: Ol. $A \subset \{0\} \cup J_n$ eräällä $n \in \mathbb{N}$.
Lause 10 $\Rightarrow$ $\{0\} \cup J_n$ äärell. ($n+1$ alkiota);
Lause 8 $\Rightarrow$ A äärell.

$\underline{\Rightarrow}$: Ol. A äärell., $\#A = m \in \mathbb{N}$. Jos $m = 0$, $A = \emptyset$ ja siis rajoitettu. Jos $m \ge 1$, void. kirj. $A = \{a_i \mid i \in J_m\}$ kuten Le 3:ssa; silloin $k \le a_m$ $\forall k \in A$, ts. A raj. $\square$

Tutk. seuraavaksi äärell. joukkojen välisiä kuvauksia.
Jos $f: A \to B$ on (mieliv.) injektio, niin $x \mapsto f(x)$ määr. bijektion $A \xrightarrow{\sim} f(A)$. Jos A on äärellinen, niin surjektiolle $f: A \to B$ pätee vastaavasti:

<u>Lemma 4</u>: A äärell., $f: A \to B$ surjektio $\Rightarrow$ $\exists\ C \subset A$ s.e. $f|C: C \xrightarrow{\sim} B$ on bijektio.

Tod.: Merk. $n = \#A$; olk. $i \mapsto a_i$ bij. $J_n \xrightarrow{\sim} A$.
f surj. $\Rightarrow$ kaikilla $b \in B$ on $f^{-1}(\{b\}) = \{a_i \mid f(a_i) = b\} \neq \emptyset$.
Merk. $k(b) = \min\{i \in J_n \mid a_i \in f^{-1}(\{b\})\}$ $\forall b \in B$
ja $C = \{a_{k(b)} \mid b \in B\} \subset A$ ($a_{k(b)} \in A$ $\forall b$).
$a_{k(b)} \in f^{-1}(\{b\})$ $\Rightarrow$ $f(a_{k(b)}) = b$ $\forall b \in B$
$\Rightarrow$ $f|C: C \to B$ surj.
$a_{k(b)} \neq a_{k(b')}$ $\Rightarrow$ $b \neq b'$ $\Rightarrow$ $f(a_{k(b)}) \neq f(a_{k(b')})$;
siis $f|C: C \to B$ myös inj. $\square$

<u>Huom.</u>: Ed. lemman tilanteessa yhdistelmä
$$g: B \xrightarrow[(f|C)^{-1}]{\sim} C \hookrightarrow A$$
on injektio, ja $f \circ g = id_B$.

Lause 12: Ol. $f: A \to B$ kuvaus. Silloin
a) $A$ äärell., $f$ surj. $\Rightarrow$ $B$ äärell., $\#A \geq \#B$;
b) $B$ äärell., $f$ inj. $\Rightarrow$ $A$ äärell., $\#A \leq \#B$.

Tod.: b) $B$ äärell., $f(A) \subset B$ $\Rightarrow$ $f(A)$ äärell. ja $\# f(A) \leq \# B$ (Lause 8); $f$ inj. $\Rightarrow$ $A \cong f(A)$; Lause 11 $\Rightarrow$ $A$ äärell. ja $\#A = \# f(A) \leq \# B$.

a) Ol. $A$ äärell., $f: A \to B$ surj. Le 4 + Huom. $\Rightarrow$ $\exists$ injektio $g: B \to A$. b) sov. tähän $\Rightarrow$ $B$ on äärell. ja $\#B \leq \#A$. $\square$

Lause 13: Ol. $A, B$ äärellisiä, $\#A = \#B$ ja $f: A \to B$ kuvaus. Silloin seur. ehdot ovat yhtäpitävät:

a) $f$ on surjektio
b) $f$ on injektio
c) $f$ on bijektio.

Tod.: c) $\Rightarrow$ a), c) $\Rightarrow$ b) triv.
b) $\Rightarrow$ c). Ol. $f$ inj. Vastaol.: $f$ ei bij. Silloin $f(A) \subsetneq B$, jolloin Lause 8 $\Rightarrow$ $\# f(A) < \# B$. $f$ inj. $\Rightarrow$ $A \cong f(A)$ $\Rightarrow$ $\#A = \#f(A) < \#B$, vaikka ol. muuleaan $\#A = \#B$, RR. $\therefore$ $f$ on bij.
a) $\Rightarrow$ c). Ol. $f$ surj. Le 4 + Huom. $\Rightarrow$ $\exists$ injektio $g: B \to A$ s.e. $f \circ g = id_B$. Implikaatio b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ $g$ on bijektio; $f \circ g = id_B$ $\Rightarrow$ $f = (f \circ g) \circ g^{-1} = id_B \circ g^{-1} = g^{-1}$ bijektio. $\square$

Lause 14: Ol. $X, Y$ äärell. joukkoja, $Y \neq \emptyset$. Silloin
a) $\#X \leq \#Y$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ inj. $X \to Y$;
b) $\#X \geq \#Y$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ surj. $X \to Y$;
c) $\#X = \#Y$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ bij. $X \xrightarrow{\sim} Y$.

Tod.: Merk. $n = \#X$, $m = \#Y$ $\Rightarrow$ $\exists$ bijektiot $f: X \xrightarrow{\sim} J_n$, $g: Y \xrightarrow{\sim} J_m$. Määr. $h: J_n \to J_m$ s.e.
$$h(k) = \begin{cases} k, & \text{kun } k \in J_n,\ k \leq m \\ 1, & \text{kun } k \in J_n,\ k > m \end{cases}$$
$\Rightarrow$ $h$ on inj., kun $n \leq m$, surjektio, kun $n \geq m$, ja bijektio, kun $n = m$.

a) $\Rightarrow$. $n \leq m \Rightarrow g^{-1} \circ h \circ f : X \to Y$ inj.
(tässä itse asiassa $h : J_n \hookrightarrow J_m$).
$\Leftarrow$. Lause 12. b).
b) $\Rightarrow$. $n \geq m \Rightarrow g^{-1} \circ h \circ f : X \to Y$ surj.
$\Leftarrow$. Lause 12. a).
c) $\Rightarrow$. $n = m \Rightarrow g^{-1} \circ h \circ f : X \xrightarrow{\sim} Y$ bij.
$\Leftarrow$. Lause 12. a) $\Rightarrow n \geq m$; Lause 12. b) $\Rightarrow n \leq m$. □

Seuraus ("Lokeroperiaate"): $X, Y$ äärell., $\# X > \# Y$,
$f : X \to Y$ kuvaus $\Rightarrow \exists\, x, x' \in X$, $x \neq x'$,
s.e. $f(x) = f(x')$.

Tod.: Muuten $f$ on inj. ja Lause 14 a) $\Rightarrow \# X \leq \# Y$. □

Tulkinta: $X$:n alkiot = "pallot", $Y$:n alkiot = "lokerot",
$f$ = pallojen asettelu lokeroihin $\Rightarrow$ ainakin yhteen lokeroon tulee 2 palloa.

Esim.: Ol. $X$ (äärell.) joukko ihmisiä, $\# X \geq 2$.
V. Kahdella on yhtä monta tuttavaa $X$:ssä.
T. Merk. $n = \# X \geq 2$. Määr. $f : X \to \{0, 1, \dots, n-1\}$
s.e. $f(x) = \# \{ y \in X \mid y \text{ } x\text{:n tuttava } (y \neq x) \}$ $\forall x \in X$.
Jos $n-1 \in f(X)$, niin joku tuntee kaikki muut,
jolloin jokaisella on joku tuttava ja siis $0 \notin f(X)$.
Siis aina $0 \notin f(X)$ tai $n-1 \notin f(X)$
$\Rightarrow \# f(X) \leq n-1 < \# X$.
Lokeroperiaate $\Rightarrow \exists\, x, x' \in X$, $x \neq x'$, s.e. $f(x) = f(x')$. □

Lause 3: $A$ äärell., $\# A = n \Rightarrow \mathcal{P}(A)$ äärell.,
$\# \mathcal{P}(A) = 2^n$.

Tod.: Induktio luvun $n \in \mathbb{N}$ suhteen.
$n = 0 \Rightarrow A = \emptyset$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\} \Rightarrow \# \mathcal{P}(A) = 1 = 2^0$.
Ind.ol.: $n \in \mathbb{N}$ ja $\# \mathcal{P}(B) = 2^n$ pätee, kun $\# B = n$.
Ol. $\# A = n+1$. Val. $x \in A$ ja merk. $B = A \setminus \{x\}$.
Lause 10 $\Rightarrow \# B = n$; ind. ol. $\Rightarrow \# \mathcal{P}(B) = 2^n$.

$$\mathcal{P}(A) = \underbrace{\{ C \subset A \mid x \notin C \}}_{= \ \mathcal{P}(B)} \cup \underbrace{\{ C \subset A \mid x \in C \}}_{\cong \ \mathcal{P}(B)} \quad \text{erill. yhdiste.}$$

$D \mapsto D \cup \{x\}$

Lause 10 $\Rightarrow \# \mathcal{P}(A) = \# \mathcal{P}(B) + \# \mathcal{P}(B) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. □

Kun $A$ on joukko ja $k \in \mathbb{N}$, merk. $\mathcal{P}_k(A) = \{B \subset A \mid \#B = k\}$. Kun $n, k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$, merk.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \left( \begin{array}{l} n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \, ; \\ 0! = 1 \end{array} \right).$$

<u>Lause 5</u>: $A$ äärell., $\#A = n$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_k(A) \text{ äärell.}, \quad \#\mathcal{P}_k(A) = \binom{n}{k}.$$

Tod.: Induktio $n$:n suhteen.

$n = 0 \Rightarrow A = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}_0(A) = \{\emptyset\}$, $\#\mathcal{P}_0(A) = 1$.

Ind. ol.: Väite pätee joukolle $B$, kun $\#B = n \in \mathbb{N}$.

Olk. $\#A = n+1$. Val. $x \in A$, ja merk. $B = A \setminus \{x\}$.

$\mathcal{P}_0(A) = \{\emptyset\} \Rightarrow \#\mathcal{P}_0(A) = 1 = \binom{n+1}{0}$;

$\mathcal{P}_{n+1}(A) = \{A\} \Rightarrow \#\mathcal{P}_{n+1}(A) = 1 = \binom{n+1}{n+1}$.

Olk. $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$. Tällöin

$$\mathcal{P}_k(A) = \underbrace{\{C \subset A \mid x \notin C, \#C = k\}}_{=\ \mathcal{P}_k(B)} \overset{\text{erill.}}{\cup} \underbrace{\{C \subset A \mid x \in C, \#C = k\}}_{\sim\ \mathcal{P}_{k-1}(B)}$$

$D \mapsto D \cup \{x\}$

Lause 10 $\Rightarrow \#\mathcal{P}_k(A) = \#\mathcal{P}_k(B) + \#\mathcal{P}_{k-1}(B)$

$$\overset{\text{ind.ol.}}{=} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n! \cdot ((n-k+1) + k)}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}. \qquad \square$$

## <u>Karteesiset tulot ja relaatiot</u>

Alkioiden $x$ ja $y$ (tässä järj.) järjestettyä paria merk. symbolilla $(x, y)$. Perusominaisuus:

$$(x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ ja } y = y'.$$

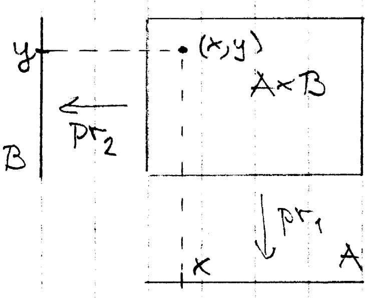
$(x, y)$ void. määr. joukko-opillisesti asettamalla

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \qquad \text{(harj. teht.)}$$

<u>Määr.</u>: joukkojen $A$ ja $B$ <u>karteesinen tulo</u> (-joukko) on

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ ja } y \in B\}.$$

Kaavat $pr_1 : (x,y) \mapsto x$, $pr_2 : (x,y) \mapsto y$ määr. projektiokuvaukset $pr_1 : A\times B \to A$ ja $pr_2 : A\times B \to B$.




Huom.: a) Kaava $(x,y) \mapsto (y,x)$ määr. bijektion $A\times B \xrightarrow{\sim} B\times A$ (käänt. kuvaus $(y,x)\mapsto(x,y)$).

b) Jos $A, B, C$ ovat joukkoja, saadaan bijektio

$$(A\times B)\times C \xrightarrow{\sim} A\times(B\times C)$$
$$((x,y),z) \longmapsto (x,(y,z)).$$

Usein samastetaan $(A\times B)\times C = A\times(B\times C) = A\times B\times C$, alkiot järj. kolmikot $(x,y,z)$, $x\in A$, $y\in B$, $z\in C$.

Lause: $A, B$ ääräll. $\Rightarrow$ $A\times B$ ääräll. ja

$$\#(A\times B) = \#A \cdot \#B.$$

Tod.: Induktio luvun $\#B \in \mathbb{N}$ suhteen.
$\#B = 0 \Rightarrow B = \emptyset$, $A\times B = \emptyset \Rightarrow$ väite selvä.
Olk. sitten $\#B > 0$. Ind. ol.: Väite pätee joukolle $A\times B'$, kun $\#B' < \#B$.
Val. $y\in B$ ja $B' = B\setminus\{y\}$. Lause 10 $\Rightarrow$ $\#B' = \#B - 1 < \#B$; ind. ol. $\Rightarrow$ $A\times B'$ ääräll. ja $\#(A\times B') = \#A \cdot \#B'$. Koska $A\times B = (A\times B') \cup (A\times\{y\})$, erillinen yhdiste, ja $A\times\{y\} \cong A$ ($(x,y) \leftrightarrow x$ bijektio), Lause 10 $\Rightarrow$ $A\times B$ on ääräll. ja

$$\begin{aligned}\#(A\times B) &= \#(A\times B') + \#(A\times\{y\}) \\ &= \#A\cdot\#B' + \#A \\ &= \#A\cdot(\#B - 1) + \#A = \#A\cdot\#B. \quad \square\end{aligned}$$

Määr.: Karl. tulon $A\times B$ osajoukko $R \subset A\times B$ on relaatio $A$:sta $B$:hen. Jos $A = B$, $R$ on joukon $A$ relaatio (itseensä).

Jos $R \subset A \times B$ on relaatio ja $(x,y) \in R$, sanotaan, että $x$ on relaatiossa $R$ y:n kanssa, merk. $xRy$.

Esim.: a) $R = A \times B$ on relaatio A:sta B:hen ("kaoottinen relaatio"). Tässä siis $xRy$ $\forall x \in A, y \in B$.

b) Joukon $A$ identtinen relaatio on $I = I_A = \{(x,x) \mid x \in A\} = \{(x,y) \in A \times A \mid x = y\}$.

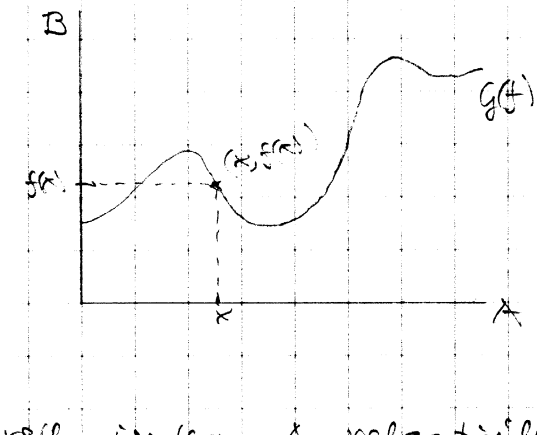
c) Jos $f : A \to B$ on kuvaus, niin relaatio

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} = \{(x,y) \in A \times B \mid y = f(x)\} \subset A \times B$$

on nimeltään f:n kuvaaja (l. graafi). Kuv. määr. $\Rightarrow$ $G(f)$:llä on seur. ominaisuus: $\forall x \in A$ $\exists$ tasan yksi $y \in B$ (nim. $y = f(x)$) s.e. $(x,y) \in G(f)$.

Kääntäen, jos $R \subset A \times B$ on relaatio ja $\forall x \in A$ $\exists$ tasan yksi $y \in B$ s.e. $(x,y) \in R$, niin merkitsemällä tätä 1-käs. y:tä $f(x)$:llä saadaan kuvaus $f : A \to B$, jolla $G(f) = R$.

(Siis "kuvaus $A \to B$" = kolmikko $(A, B, R)$, missä $R \subset A \times B$ täyt. yo. ehdon.)




d) Äärell. joukon $A$ relaatioiden lukumäärä on

$$= \#\mathcal{P}(A \times A) = 2^{\#(A \times A)} = 2^{(\#A)^2}.$$

Määr.: Joukon $A$ relaatio $R$ on osittainen järjestys(-relaatio), jos kaikilla $x, y, z \in A$ on

i) $xRx$ (refleksiivisyys)
ii) $xRy$ ja $yRx \Rightarrow x = y$ (antisymmetrisyys)
iii) $xRy$ ja $yRz \Rightarrow xRz$ (transitiivisuus).

Osittainen järjestys $R$ on täysi (totaalinen, lineaarinen) järjestys (lyhyesti järjestys), jos kaikilla $x, y \in A$ on $xRy$ tai $yRx$.

Joukko $A$ varustettuna tietyllä (ositt.) järjestyksellään $R$ (eli pari $(A,R)$) on (osittain) järjestetty joukko.

(Ositt.) järjestysrelaatiota $R$ merk. usein $\leq$ tms..

Esim.: a) II.2:ssa esitetty $\mathbb{N}$:n "järjestys" $\leq$ on täysi järjestys ed. määr. mielessä (samoin joukkojen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$ tavanom. järj.).

b) Jos $X$ on joukko, niin sisältymisrelaatio $\subset$ on ositt. järjestys $\mathcal{P}(X)$:ssä:

i) $A \in \mathcal{P}(X)$ (eli $A \subset X$) $\Rightarrow A \subset A$ ($x \in A \Rightarrow x \in A$ triv.).

ii) $A, B \in \mathcal{P}(X)$, $A \subset B$ ja $B \subset A \Rightarrow A = B$.

iii) $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$, $A \subset B$ ja $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ $\left(x \in A \underset{A \subset B}{\Rightarrow} x \in B \underset{B \subset C}{\Rightarrow} x \in C\right)$.

Tämä $\mathcal{P}(X)$:n ositt. järj. ei ole täysi, jos $X$:ssä on ainakin 2 alkiota ($x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow$ ei päde $\{x\} \subset \{y\}$ eikä $\{y\} \subset \{x\}$).

c) Ol. $X$ joukko ja $\mathcal{P}_f(X) = \{A \subset X \mid A \text{ äärellinen}\}$. Kun $A, B \in \mathcal{P}_f(X)$, määr. $A \leq B \Leftrightarrow \#A \leq \#B$ ($\Leftrightarrow \exists$ inj. $A \to B$, ks. Lause 14).

Relaatio $\leq$ on refl. ja transit., ja kaikilla $A, B \in \mathcal{P}_f(X)$ on $A \leq B$ tai $B \leq A$, mutta $\leq$ ei ole antisymm. (jos $\#X \geq 2$): $A \leq B$ ja $B \leq A \Leftrightarrow A \cong B$.

## II.5 Äärettömät joukot

Esim.: $\mathbb{N}$ on ääretön.

Tod.: (P1), (P2) $\Rightarrow$ $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $s(n) = n+1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, on injektio, mutta ei surjektio; Lause 13 $\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ ei äärell. $\square$

Määr.: Joukko $A$ on numeroituva, jos $A \cong \mathbb{N}$ (monisteessa merk. $A \approx \mathbb{N}$). Jos $A$ ei ole äärellinen eikä numeroituva, se on ylinumeroituva.

Huom.: $A$ numeroituva $\Leftrightarrow$ se void. esittää muodossa $A = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, missä $x_k \neq x_l$, kun $k \neq l$ (ts. $k \mapsto x_k$ on bij. $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} A$).

Esim.: a) $\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ovat numeroituvia (harj.teht.; jälkimm. on vaativa).

b) $A, B$ numeroituvia $\Rightarrow$ $A \times B$ numeroituva
($A \cong \mathbb{N}$, $B \cong \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $A \times B \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \underset{a)}{\cong} \mathbb{N}$).

Huom.: a) $A$ on "korkeintaan numeroituva" (ts. äärell. tai numeroituva) $\Leftrightarrow$ $\exists$ injektio $A \to \mathbb{N}$.
b) $A$ on ääretön (ts. "vähintään numeroituva") $\Leftrightarrow$ $\exists$ injektio $f: \mathbb{N} \to A$
(jokaisella $n \in \mathbb{N}$ val. $f(n+1) \in A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$).

Esim.: a) $\mathbb{R} \cong ]0,1[$ $\left( ]0,1[ \xrightarrow{\sim} ]0,\infty[ \xrightarrow[\ln]{\sim} \mathbb{R} \right)$.
$x \longmapsto x/(1-x)$

b) $]0,1[ \cong ]0,1]$. Eräs bijektio $f: ]0,1] \to ]0,1[$ saadaan asettamalla $f(x) = x$, kun $x \in ]0,1] \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$, ....

c) $\mathbb{R}$ on ylinumeroituva.

"Tod.": Riittää os., että $]0,1]$ on ylinumeroituva.
Vastaol.: $]0,1] = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ numeroituva.
$a \in ]0,1]$ $\Leftrightarrow$ $a$:llä on päättymätön desim. esitys
$a = 0.a_1a_2a_3\dots$, $a_k \in \{0,1,2,\dots,9\}$, joukin $a_k \neq 0$
(desim. esitys ei ole 1-käs.; esim. $0.1999\dots = 0.2000\dots$).
Määr. $y \in ]0,1]$ s.e.

$y$:n $k$:s desim. $= 3$, jos $x_k$:n $k$:s desim. $= 1$ jossakin desimaaliesityksessä;
$y$:n $k$:s desim. $= 1$ muulloin (ts. jos $x_k$:n $k$:s desim. $\neq 1$ jokaisessa desim. es.)

Vastaol. $\Rightarrow$ $y = x_n$ eräällä $n \in \mathbb{N}_+$. 2 vaihtoehtoa:
1) $x_n$:n $n$:s desim. $= 1$ jossakin desim. esityksessä, jolloin ko. desim. $\in \{0,1,2\}$ jokaisessa desim. esityksessä; $y$:n määr. $\Rightarrow$ $y$:n $n$:s desim. $= 3$ $\Rightarrow$ $y \neq x_n$, RR.
2) $x_n$:n $n$:s desim. $\neq 1$ jokaisessa desim. esityksessä $\Rightarrow$ $y$:n $n$:s desim. $= 1$ $\Rightarrow$ $y \neq x_n$, RR. $\square$