Joukko-opin merkintöjä

"joukko" = "kokoelma" objekteja, alkioita.

$x \in A$ x on joukon A alkio
$x \notin A$ ei ole

Esim.: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ luonnolliset luvut
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ kokonaisluvut
$\mathbb{Q}$ rationaaliluvut
$\mathbb{R}$ reaaliluvut

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ = joukko, jonka alkiot ovat $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(joukkoja $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Q}$ tutkitaan myöhemmin)

Määr.: Joukot A ja B ovat samat, $A = B$, jos niillä on samat alkiot, ts. kaikilla x on

$$x \in A \iff x \in B.$$

"$P \iff Q$" luetaan "P on tosi, jos ja vain jos Q on tosi"
tai "... aina ja vain kun ..."
tai "... täsmälleen silloin kun ..."
tai "P ja Q ovat yhtäpitävät".

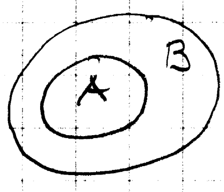
$(P \iff Q)$:n totuusarvo riippuu P:n ja Q:n totuusarvoista seuraavan taulukon mukaisesti ($+$ = tosi, $-$ = epätosi):

P	Q	$P \iff Q$
+	+	+
+	−	−
−	+	−
−	−	+

Siis mm. $\{x, y\} = \{y, x\}$
$\{x, x\} = \{x\}$.

Määr.: A on B:n *osajoukko*, $A \subset B$, jos A:n alkiot ovat myös B:n alkioita, ts. kaikilla x

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$



Osajoukko $A \subset B$ on *aito*, $A \subsetneq B$, jos $A \neq B$.

"$P \Rightarrow Q$" luetaan "P:stä seuraa Q"
tai "jos P niin Q".

Totuusarvotaulukko:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	−	+

Huom.: jos P on epätosi, $P \Rightarrow Q$ on aina tosi.

Huom.: a) $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ ja $B \subset A$.
b) $A \subsetneq B \Leftrightarrow [\, x \in A \Rightarrow x \in B$, mutta $\exists y \in B$ s.e. $y \notin A \,]$.

"$\exists$" luetaan "on olemassa ..." tai "... jollakin ..."
"$\forall$" luetaan "... kaikilla ..." tai "... jokaisella ...".

Tyhjässä joukossa $\emptyset$ ei ole yhtään alkiota.
Kaikilla joukoilla A on $\emptyset \subset A$
($x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ on tosi, koska $x \in \emptyset$ on aina epätosi)

Esim.: $A = \{0, \{0\}, \{0,1\}\}$.
A:n alkiot : $0, \{0\}, \{0,1\}$ (3 kpl)
A:n osajoukot : $\emptyset, \{0\}, \{\{0\}\}, \{\{0,1\}\}, \{0, \{0\}\}, \{0, \{0,1\}\}, \{\{0\}, \{0,1\}\}$ ja A (8 kpl).
Erityisesti $\{0\} \in A$ ja $\{0\} \subset A$.

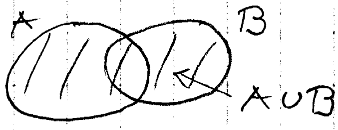
Olkoon A joukko, ja kaikilla $x \in A$ lause $P(x)$ joko tosi tai epätosi. Silloin

$\{x \in A \mid P(x)\}$ (tai $\{x \in A : P(x)\}$)
= niiden $x \in A$ joukko, joilla $P(x)$ on tosi.

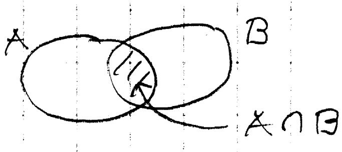
Esim.:
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\} = \{1, -1\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\} = \emptyset$$

Määr.: Joukkojen A ja B yhdiste $A \cup B$, leikkaus $A \cap B$ ja erotus $A \setminus B$ ovat

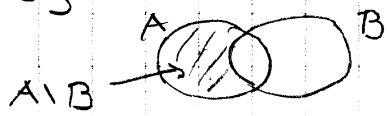
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}$$



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}$$



$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ ja } x \notin B\}$$



Jos $B \subset A$, $A \setminus B = \complement_A B$ on B:n komplementti A:ssa.

Lauseiden "P tai Q" (eli $P \vee Q$) ja "P ja Q" (eli $P \wedge Q$) totuusarvotaulukot:

P	Q	P tai Q
+	+	+
+	−	+
−	+	+
−	−	−

huom.

P	Q	P ja Q
+	+	+
+	−	−
−	+	−
−	−	−

Lause $x \notin B$ on lauseen $x \in B$ <u>negaatio</u> $\neg(x \in B)$.
Negaation $\neg P$ totuusarvotaulukko:

P	$\neg P$
+	−
−	+

<u>Esim.:</u> a) Lauseen $\forall x\, P(x)$ negaatio on $\exists x\, \neg P(x)$.
b) Lauseen $\exists x\, P(x)$ negaatio on $\forall x\, \neg P(x)$.

<u>Esim.:</u>

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
+	+	+	−	−	+
+	−	−	−	+	−
−	+	+	+	−	+
−	−	+	+	+	+

samat!

Siis $[P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)]$ on identtisesti tosi eli <u>tautologia</u>.
$P \Rightarrow Q$ ("oletuksesta" P seuraa "väite" Q) voidaan siis todistaa myös <u>epäsuorasti</u> muodossa $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ ("vastaoletuksesta" $\neg Q$ seuraa $\neg P$ eli ristiriita oletuksen P kanssa).

Operaatioille $\cup$, $\cap$ ja $\setminus$ on voimassa lukuisia joukko-opillisia identiteettejä, mm.:

<u>Lause</u> Kaikilla joukoilla A, B ja C on

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Tod.: <u>1. identiteetti</u>: Todetaan, että
$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ ja $x \in B \cup C$
$\Leftrightarrow x \in A$ ja ($x \in B$ tai $x \in C$);
$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B)$ tai $x \in (A \cap C)$
$\Leftrightarrow$ ($x \in A$ ja $x \in B$) tai ($x \in A$ ja $x \in C$).

Riittää siis todeta: Kaikilla lauseilla P, Q, R ovat lauseet "P ja (Q tai R)" ja "(P ja Q) tai (P ja R)" yhtäpitävät.

P	Q	R	$Q\vee R$	$P\wedge(Q\vee R)$	$P\wedge Q$	$P\wedge R$	$(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$
+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	−	+	+	+	−	+
+	−	+	+	+	−	+	+
+	−	−	−	−	−	−	−
−	+	+	+	−	−	−	−
−	+	−	+	−	−	−	−
−	−	+	+	−	−	−	−
−	−	−	−	−	−	−	−

samat!

2. identiteetti tod. samoin. $\square$

Esim.:
$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$
$$B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$
$$\Rightarrow \quad A\cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$
$$A\cap B = \{0, 2\}$$
$$A\setminus B = \{4, 6, 8, \ldots\}$$
$$B\setminus A = \{-2, -1, 1\}.$$

Yleisemmin, jos $\mathcal{A}$ on kokoelma (= joukko) joukkoja, määritellään

$$\bigcup\mathcal{A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} = \{x \mid x\in A \text{ jollakin } A\in\mathcal{A}\}$$
$$= \{x \mid \exists A\in\mathcal{A} \text{ s.e. } x\in A\}$$

$$\bigcap\mathcal{A} = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \{x \mid x\in A \ \forall A\in\mathcal{A}\}.$$

Jos $\mathcal{A} = \{A_i \mid i\in I\}$, I jokin indeksijoukko, merk.

$$\bigcup\mathcal{A} = \bigcup_{i\in I} A_i, \quad \bigcap\mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} A_i.$$

(Perinteinen merkintätapa, kun $I = \mathbb{N}$:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} = \bigcup_{i=0}^{\infty}, \quad \bigcap_{i\in\mathbb{N}} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \quad)$$

<u>Esim.</u>: $I = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$

$A_t = \{x \in \mathbb{R} \mid -t < x < t\}$, kun $t \in I$.

Väite: $\bigcap_{t \in I} A_t = \{0\}$

Tod.: "$\supset$": $-t < 0 < t \quad \forall t > 0 \Rightarrow 0 \in A_t \quad \forall t \in I$

$\Rightarrow 0 \in \bigcap_{t \in I} A_t \Rightarrow \{0\} \subset \bigcap_{t \in I} A_t$.

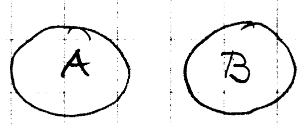
"$\subset$": Ol. $x \in \bigcap_{t \in I} A_t \Rightarrow -t < x < t \quad \forall t > 0$.

<u>Vastaol.</u>: $x \neq 0 \Rightarrow |x| > 0 \Rightarrow |x| \in I$,

mutta $x \notin A_{|x|}$ (koska $x = |x|$ tai $x = -|x|$).

Siispä $x \notin \bigcap_{t \in I} A_t$, RR. $\therefore x = 0$. $\square$

Joukot A ja B ovat <u>erilliset</u>, jos $A \cap B = \emptyset$, t.s. niillä ei ole yhteisiä alkioita.



Olkoon A joukko.
A:n <u>potenssijoukko</u> $\mathcal{P}(A)$ on joukko, jonka alkioina ovat kaikki A:n osajoukot:

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}.$$

Siten $B \in \mathcal{P}(A) \iff B \subset A$

erota nämä toisistaan!

<u>Esim.</u>: a) $\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

b) joukon $\mathcal{P}(\{0, \{0\}, \{0,1\}\})$ 8 alkiota lueteltiin aiemmin

c) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Erityisesti $\mathcal{P}(\emptyset) \neq \emptyset$.