Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
2. kurssikoe ke 29.4.2009

1. Olkoon G additiivinen Abelin ryhmä. Osoita, että G:n yhteenlasku $f\colon G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x + y$, on ryhmähomomorfismi ja että ryhmät $\mathrm{Ker}(f)$ ja G ovat keskenään isomorfiset.

2. a) Määritä positiiviset kokonaisluvut n, joilla multiplikatiivisen ryhmän $\mathbb{Z}_n^*$ kertaluku on 4.

b) Osoita, että millään positiivisella kokonaisluvulla n ei additiivisen ryhmän $\mathbb{Z}_n$ niiden alkioiden lukumäärä, jotka yksinään virittävät $\mathbb{Z}_n$:n, ole 31.

3. Olkoon R kommutatiivinen rengas. Renkaan R *alkuideaali* on R:n ideaali $P \neq R$, jolla kaikilla $a, b \in R$ ehdosta $ab \in P$ seuraa, että $a \in P$ tai $b \in P$. Osoita, että jos I on R:n ideaali, niin tekijärengas R/I on kokonaisalue jos ja vain jos I on R:n alkuideaali.

4. Jaa polynomi $f = x^4 + 3x^3 + x + 1$ jaottomien tekijöiden tuloksi renkaassa $\mathbb{Z}_5[x]$ osoittamalla ensin, että f:llä ei ole ensimmäisen asteen tekijöitä, ja tekemällä sitten yrite $f = (x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D)$.