Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
1. kurssikoe ke 25.2.2009

1. Etsi pienin positiivinen kokonaisluku n_0, jolla $n! \geq 2^n$, kun $n = n_0$. Osoita sitten induktiolla, että $n! \geq 2^n$ kaikilla $n \geq n_0$. (Tässä siis $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.)

2. Osoita, että kuvaus $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$,

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{jos } n \text{ on parillinen,} \\ -(n+1)/2, & \text{jos } n \text{ on pariton,} \end{cases}$$

on bijektio, ja määritä sen käänteiskuvaus. (Kurssillamme $0 \in \mathbb{N}$.)

3. a) Olkoon X joukko ja $E_1 \subset X \times X$ sekä $E_2 \subset X \times X$ joukon X ekvivalenssirelaatioita. Osoita, että myös $E = E_1 \cap E_2$ on joukon X ekvivalenssirelaatio.

b) Määritä E tapauksessa, jossa $X = \mathbb{Z}$ ja

$$xE_1y \iff x \equiv y \pmod{72} \quad \text{sekä} \quad xE_2y \iff x \equiv y \pmod{60}, \quad \text{kun } x, y \in \mathbb{Z}.$$

4. Olkoon X ääretön joukko, $\mathcal{F} = \{A \subset X \mid A \text{ äärellinen}\}$ joukon X äärellisten osajoukkojen joukko ja $\mathcal{F}_c = \{A \subset X \mid X \setminus A \text{ äärellinen}\}$ joukon X äärellisten osajoukkojen komplementtien joukko. Tutki, voidaanko joukoissa $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{F}_c$ määritellä laskutoimitus kaavalla $(A, B) \mapsto A \cap B$ ja, jos voidaan, ovatko $(\mathcal{F}, \cap)$ ja $(\mathcal{F}_c, \cap)$ tällöin monoideja.