

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Algebra I

1. kurssikokeen 2. korvaava koe ti 3.3.2009

1. Osoita induktiolla luvun $n \geq 1$ suhteen, että jos $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, niin

$$\sum_{i=1}^n k_i \leq n \cdot \max\{k_1, \dots, k_n\}.$$

(Yllä $\max\{k_1, \dots, k_n\}$ tarkoittaa joukon $\{k_1, \dots, k_n\}$ suurinta lukua.)

2. Osoita, että kuvaus $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$,

$$f(n) = \begin{cases} -n/2, & \text{jos } n \text{ on parillinen,} \\ (n+1)/2, & \text{jos } n \text{ on pariton,} \end{cases}$$

on bijektio, ja määritä sen käänteiskuvaus. Konstruoi lisäksi bijektio $f': \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, jolla $f'(10) = 7$. (Kurssillamme $0 \in \mathbb{N}$.)

3. a) Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita määritelmän nojalla, että joukon \mathbb{Z} relaatio $E_n \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, jolla

$$xE_ny \iff x - y \in n\mathbb{Z}, \quad \text{kun } x, y \in \mathbb{Z},$$

on ekvivalenssi. (Yllä $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$.)

b) Tarkastellaan joukon \mathbb{Z} relaatioita $E = E_4 \cup E_6$ ja $E' = E_4 \cup E_{12}$. Osoita, että toinen niistä on ekvivalenssi, toinen ei.

4. Olkoot $\max(x, y) = \max\{x, y\}$ ja $\min(x, y) = \min\{x, y\}$ joukon $\{x, y\} \subset \mathbb{N}$ suurin alkio ja pienin alkio, kun $x, y \in \mathbb{N}$. Tutki, ovatko (\mathbb{N}, \max) ja (\mathbb{N}, \min) monoideja.