Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
1. kurssikokeen 1. korvaava koe pe 27.2.2009

1. Määritellään luvut f_n, kun $n \in \mathbb{N}$, rekursiivisesti seuraavalla tavalla:

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \text{ kun } n \geq 1.$$

Osoita induktiolla, että f_{n+1} ja f_n ovat keskenään jaottomat kullakin $n \geq 0$.

2. Osoita, että kuvaus $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$,

$$f(n) = \begin{cases} -2n, & \text{jos } n \leq 0, \\ 2n-1, & \text{jos } n > 0, \end{cases}$$

on bijektio, ja määritä sen käänteiskuvaus.

3. a) Olkoot X ja Y joukkoja ja $f\colon X \to Y$ kuvaus. Osoita määritelmän nojalla, että joukon X relaatio R_f, jolle

$$x\, R_f\, y \iff f(x) = f(y), \qquad \text{kun } x, y \in X,$$

on ekvivalenssi.

b) Olkoon $X = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Kun $n \in X$, olkoon $P(n)$ luvun n alkutekijöiden joukko ja $\pi(n) = \sharp P(n)$ luvun n erisuurten alkutekijöiden lukumäärä. Määritä ekvivalenssiluokkien joukot X/R_π ja X/R_P kuvauksille $\pi\colon X \to \mathbb{N}$ ja $P\colon X \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

4. Funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *pariton*, jos $f(-x) = -f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja *parillinen*, jos $f(-x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Olkoon $\mathcal{F}_-$ kaikkien parittomien funktioiden $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joukko ja $\mathcal{F}_+$ kaikkien parillisten funktioiden $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joukko. Tutki, voidaanko joukoissa $\mathcal{F}_-$ ja $\mathcal{F}_+$ määritellä laskutoimitus kuvausten yhdistämisellä eli kaavalla $(f, g) \mapsto f \circ g$ ja, jos voidaan, ovatko $(\mathcal{F}_-, \circ)$ ja $(\mathcal{F}_+, \circ)$ tällöin monoideja.