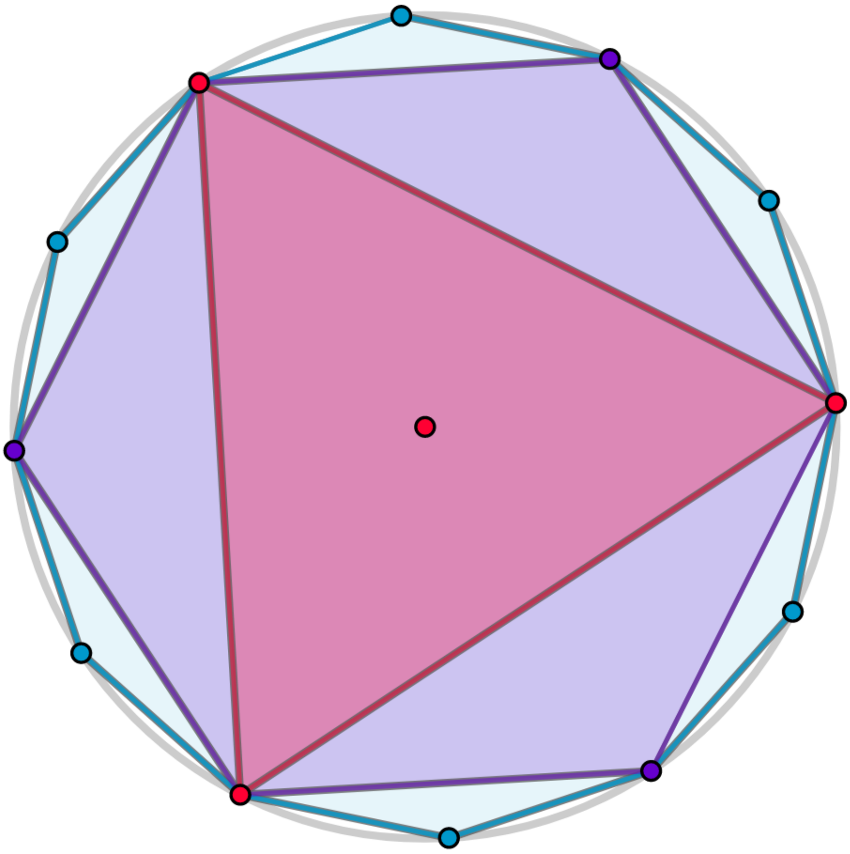
# Koulumatematiikan tarina

*–klassisten ongelmien ja oivallusten kautta esitettynä*



**FT Martina Aaltonen, 2019**

Tämä avoin oppimateriaali on laadittu osana LUMATIKKA-täydennyskoulutusohjelmaa, jonka toteutuksesta vastaa LUMA-keskus Suomi -verkosto yhteistyökumppaneineen. Ohjelman rahoittaa Opetushallitus.

## Johdanto

Matematiikan tarina on pitkä. Merkkejä käytännönläheisen matematiikan harjoittamisesta on löydetty jo muinaisista Egyptin, Babylonian ja Intian kulttuureista. Matematiikkaa käytettiin esimerkiksi Egyptin pyramidien rakentamiseen. Antiikin aikana alettiin kiinnostua myös teoreettisista matemaattisista ongelmista, joilla ei ollut suoria sovelluksia käytännön elämään. Antiikin Kreikassa tutkittiin esimerkiksi kysymystä siitä, millaisia geometrisia muotoja voidaan piirtää harpin ja viivaimen avulla.

Antiikin Kreikka oli matematiikan kehityksen kehto, jonne suuri osa koulumatematiikasta juontaa juurensa. Pimeällä keskiajalla matematiikan kehitys Euroopassa pysähtyi. Antiikissa keksittyä matematiikkaa ei kuitenkaan unohdettu, vaan se siirtyi itään, intialaisten ja arabien keskuuteen. Keskiajan loppupuolella se palasi idästä takaisin Eurooppaan monien uusien ideoiden kera.

Koulumatematiikka on muotoutunut tuhansien vuosien aikana. Sitä ovat olleet luomassa eri kulttuureissa ja eri aikakausilla eläneet ihmiset. Koulumatematiikan historian lehdillä näkee antiikin ajattelijoita, kuten 600-luvulla eaa. vaikuttaneen Pythagoraksen, 300-luvulla eaa. mietiskelleen Arkhimedeksen, 300-luvulla eaa. eläneen Eukleideksen sekä 100-luvulla jaa. tähtiä katselleen Ptolemaioksen. Matkaa saa tehdä yhdessä 700-luvun kokeneen intialaisen matemaatikon Brahmaguptan sekä 800-luvun kokeneen persialaisen matemaatikon Al-Khwarizmin kanssa. Vastaan tulee matkan varrella lopulta myös ranskalainen filosofi Descartes päästäessä kertomuksessa 1600-luvulle asti.

Koulumatematiikan tarina esitetään tässä kertomuksessa yhdeksässä osassa.

Ensimmäisessä osassa mietitään luonnollisten lukujen ominaisuuksia.

Toisessa osassa tutustutaan siihen, missä, milloin ja miksi erilaiset luvut ja lukujärjestelmät ovat ilmestyneet matematiikan historian näyttämölle.

Kolmannessa osassa siirrytään antiikin Kreikkaan laskemaan pinta-aloja ja piirtämään säännöllisiä monitahokkaita harpilla ja viivaimella.

Neljännessä osassa konstruoidaan irrationaalilukuja geometrisesti.

Viidennessä osassa pysähdytään trigonometrian syntyyn johtaneiden kysymysten ja oivallusten ääreen.

Kuudennessa osassa ihmetellään eri avaruuskappaleiden tilavuuksien ja pinta-alojen välisiä suhteita, mutta katsotaan myös Platonin kappaleita.

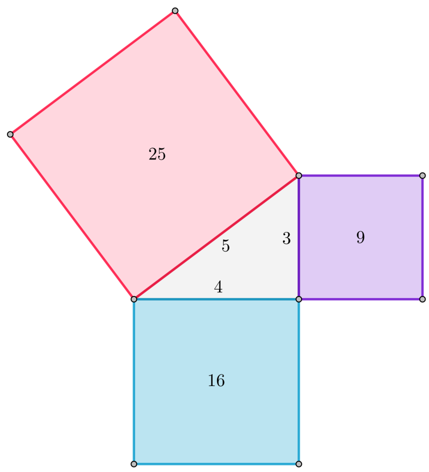
Seitsemännessä osassa etsitään yhtälöille ratkaisuja algebran avulla ja täydennetään toisen asteen yhtälö neliöksi.

Kahdeksannessa osassa luvut sijoitetaan lukusuoralle ja geometriset kuviot koordinaatistoon.

Yhdeksännessä osassa klassiset kartioleikkaukset muuttuvat toisen asteen polynomiyhtälöiden kuvaajiksi.

## Matematiikan historia alkaa luonnollisista luvuista

Luonnollisia luvuilla on kuvattu lukumääriä kautta matematiikan historian. Muinaisten egyptiläisten ajoista lähtien on kiinnitetty huomiota siihen, että luonnollisilla luvuilla on keskenään eroavia matemaattisia ominaisuuksia. Toiset luonnolliset luvut ovat esimerkiksi neliölukuja, eli luonnollisten lukujen neliöitä, ja toiset eivät. Luonnollisten lukujen ominaisuuksia tutkivaa matematiikkaa kutsutaan lukuteoriaksi.




**Kuva 1:** Kuvassa luvut 3, 4 ja 5 ovat Pythagoraan lukuja ja 9, 16 ja 25 neliölukuja. Pythagoraan lause toteutuu kuvassa neliöiden pinta-aloja koskevana yhtälönä $9 + 16 = 25$.

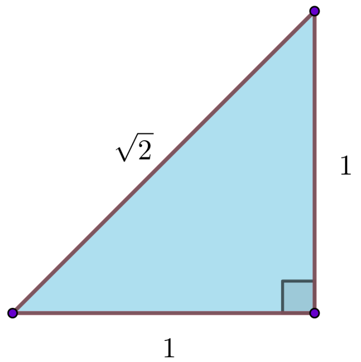
Muinaiset egyptiläiset sekä antiikin pythagoralaiset tutkivat sellaisten suorakulmaisten kolmioiden olemassaoloa, joiden sivujen pituudet olivat luonnollisia lukuja. He tekivät taulukoita suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksina esiintyvistä luonnollisista luvuista, joita alettiin yleisesti kutsua Pythagoraan luvuiksi.

Antiikin kreikkalaiset tutkivat Pythagoraan lukujen ohella erityisesti luonnollisten lukujen jaollisuutta. Eukleides muun muassa osoitti, että jokainen luonnollinen luku voidaan esittää alkulukujen tulona. Eukleideella oli lisäksi kätevä algoritmi kahden luonnollisen luvun suurimman yhteisen tekijän löytämiseksi.

## Monimutkainen maailma vaatii monimutkaisia lukuja

Maailman kuvaamiseen matematiikalla tarvitaan luonnollisia lukuja monimutkaisempia lukuja, sen huomasivat jo antiikin pythagoralaiset. Kuinka paljon lukuja maailman kuvaamiseen tarvitaan? Maailman ja matematiikan ihmettely ovat historian saatossa vieneet ihmettelijänsä tilanteeseen, jossa tunnettujen lukujen rinnalle on tarvittu aivan uusia lukuja. Mahtaako lukuja tarvita maailman kuvaamiseen matematiikalla vielä nykyisinkin tunnettuja lukuja enemmän.

Murtolukuja esiintyi lukumäärien suhteina jo muinaisissa Egyptin ja Babylonian kulttuureissa. Pythagoralaisella koulukunnalla oli antiikin aikana käsitys maailmassa vallitsevasta harmoniasta, jossa murtoluvuilla voitaisiin selittää kaikki mitä maailmassa on. He konstruoivat kuitenkin lopulta itse sellaisen suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusan pituutta ei ollut mahdollista ilmaista murtolukuna. Samalla he törmäsivät siihen kiperään tosiasiaan, että maailman kuvaamiseen matematiikalla tarvitaan myös murtolukuja monimutkaisempia lukuja, irrationaalilukuja.




**Kuva 2:** Pythagoralaiset osoittivat, että sinisen kolmion hypotenuusan pituutta ei voida ilmaista murtolukuna. Tämä rikkoi pythagoralaisten teorian harmoniasta, jonka mukaan pelkät murtoluvut riittäisivät maailman kuvaamiseen.

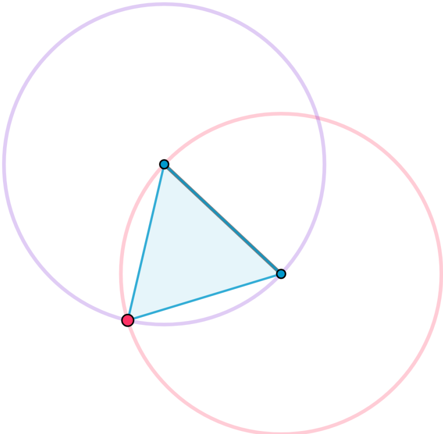
Muinaisilla egyptiläisillä oli hieroglyfikirjoituksessa lukumäärälle *ei yhtään kappaletta* oma merkkinsä. Muinaisten Babylonialaisten paikkaan perustuvassa merkkijärjestelmässä tyhjällä paikalla oli paljolti samaa merkitystä kuin luvulla nolla. Nolla esiintyy kuitenkin itsenäisenä lukuna ensimmäistä kertaa vasta Ptolemaioksen 100-luvulle sijoittuvissa teksteissä.

Merkkejä negatiivisten lukujen käytöstä on olemassa jo ajalta ennen ajanlaskun alkua. Muinaisessa Kiinassa negatiiviset ja positiiviset luvut erotettiin toisistaan väreillä. Negatiivisilla luvuilla ruvettiin Intiassa merkitsemaan velkaa 700-luvun tienoilla. Negatiivisia lukuja ei kuitenkaan keksitty antiikin Kreikassa, eivätkä arabitkaan hyväksyneet niitä osaksi matematiikkaa. Negatiiviset luvut tulivat yleisesti osaksi eurooppalaista matematiikkaa vasta varhaismodernilla ajalla (1600 - 1700 luvulla).

Nykyisin käytössä olevat numerosymbolit 1,2,3,4,5,6,7,8,9 ja paikkaan perustuva kymmenjärjestelmä ovat peräisin 600-luvun Intiasta. Ne tulivat Eurooppaan Arabian islamilaisen kulttuurin mukana (1200 - 1500-luvulla). Arabit lisäsivät numerosymbolien joukkoon symbolin 0 ja ottivat käyttöön desimaaliluvut.Kymmenjärjestelmää pidetään yhtenä matematiikan suurimmista innovaatioista.

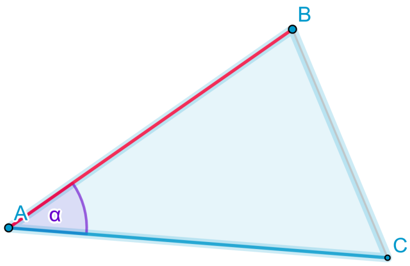
## Kuvioita harpilla ja viivaimella

Antiikin kreikkalaisille tasogeometria käsitti pisteiden, janojen, kulmien ja monikulmioiden piirtämistä tasoon harppia ja viivainta käyttäen. Antiikin kreikkalaisia kiinnostivat janan pituuden ja pinta-alan numeerisen ratkaisemisen sijasta janojen ja pinta-alojen väliset suhteet. Alkuperäisessä muodossaan esimerkiksi Pythagoraan lause koski suorakulmaiseen kolmioon liittyvien neliöiden pinta-alojen välisiä suhteita.



**Kuva 3:** Säännöllisessä monikulmiossa, kuten kuvan tasasivuisessa kolmiossa, kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kulmat ovat yhtä suuria. Kuvan tasasivuinen kolmio piirretään harpin ja viivaimen avulla seuraavasti. Ensin piirretään kuvan sinisten pisteiden välinen jana. Sen jälkeen piirretään janan kummastakin päätepisteestä ympyrät, joilla on janan mittainen säde. Ympyröiden punainen leikkauspiste on säteen etäisyydellä kummankin ympyrän keskipisteestä ja sen vuoksi kuvan pisteet määrittävät tasasivuisen kolmion.

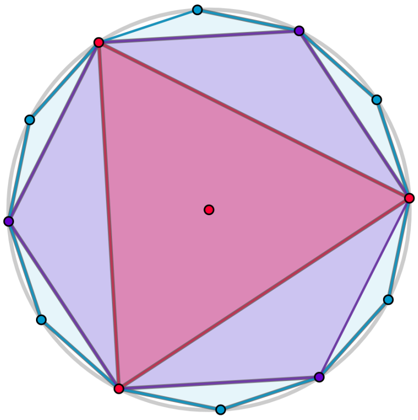
Yksi antiikin ajan tärkeimmistä matemaattisista teoksista on Eukleideen *Alkeet*, joka sijoittuu 300-luvulle eaa.. Teoksen geometriaa koskevassa osiossa Eukleides määrittelee tasogeometrian peruskäsitteet, kuten pisteen, janan ja ympyrän sekä risti- ja vieruskulmat. Hän esittää käsitteiden avulla viisi vaatimusta, joiden varaan hän rakentaa euklidisen tasogeometrian aksiomaattisesti. Kolmen ensimmäisen vaatimuksen tarkoitus on mahdollistaa harppi- ja viivainkonstruktiot. Kaksi viimeistä vaatimusta ovat teoksessa esitettävien lauseiden todistuksia varten. Eukleideen kolmioiden yhtenevyyttä koskevat lauseet esimerkiksi kertovat, mitkä kolmion sivujen ja kulmien yhdistelmät riittävät kolmion tunnistamiseen.




**Kuva 4:** Kolmio voidaan tunnistaa Eukleideen kolmion yhtenevyyttä koskevien lauseiden avulla. Yhtenevyyslauseen sivu-kulma-sivu nojalla tiedetään, että kaksi kolmiota ovat yhtenevät mikäli kolmion kaksi sivua ovat yhtä pitkät ja sivujen väliset kulmat yhtä suuret.

Antiikin Kreikassa osattiin harpin ja viivaimen avulla muun muassa puolittaa jana, muodostaa janalle keskinormaali ja jakaa kulma kahteen yhtä suureen osaan. Kaikkia kulmia ei kuitenkaan osattu, sitkeistä yrityksistä huolimatta, jakaa kolmeen yhtä suureen osaan. Parituhatta vuotta myöhemmin todistettiin tehtävän olevan mahdoton tasasivuisen kolmion kulmien osalta.

Antiikin kreikkalaiset konstruoivat harpin ja viivaimen avulla säännöllisiä monikulmioita, kuten tasasivuisen kolmion, neliön, viisikulmion, kuusikulmion ja kahdeksankulmion. Kaikkia säännöllisiä monikulmioita, esimerkiksi säännöllistä yhdeksänkulmiota, he eivät kuitenkaan osanneet tällä tavoin konstruoida. Se osoittautui myös ajan saatossa mahdottomaksi tehtäväksi, koska ratkaisu olisi edellyttänyt tasasivuisen kolmion kulmien jakamista harpilla ja viivaimella kolmeen yhtä suureen osaan.



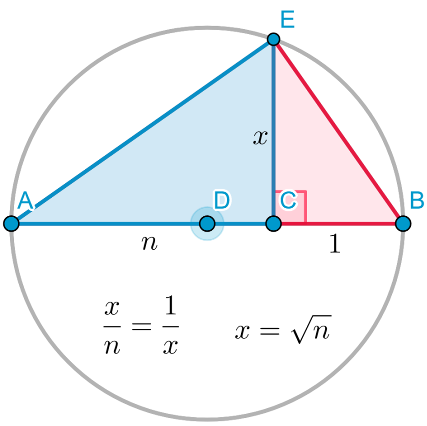
**Kuva 5:** Oletetaan, että kuvassa esiintyvän ympyrän säde on 1. Tällöin ympyrän pinta-ala on $\pi$. Kuvassa esiintyvien säännöllisten monikulmioiden pinta-aloilla voidaan arvioida ympyrän pinta-alaa. Tasasivuisen kolmion pinta-alaksi saadaan $3\sqrt{3}/4 \approx 1,30$ säännöllisen 6-kulmion pinta-alaksi saadaan $3\sqrt{3}/2 \approx 2,60$ ja säännöllisen 12-kulmion pinta-alaksi saadaan tasan 3. Arkhimedes pystyi saamaan luvulle $\pi \approx 3,14$ arvion kahden desimaalin tarkkuudella laskemalla sellaisen säännöllisen 96-kulmion pinta-alan, jonka kärjet ovat yksikköympyrän kehällä.

## Monimutkaisia lukuja harpilla ja viivaimella

Ympyrän mukana matematiikkaan ilmeistyi luku $\pi$, joka pythagoralaisten löytämän irrationaaliluvun $\sqrt{2}$ tapaan aiheutti antiikissa paljon päänvaivaa.

Luku $\pi$ voidaan ilmaista geometrisesti, paitsi yksikköympyrän kehän kaaren puolikkaan pituutena, myös yksikköympyrän pinta-alana. Arkhimedes ja Eudoksos oivalsivat hyödyntää ympyrän sisään piirrettyjä säännöllisiä monikulmioita luvun $\pi$ arvioimiseksi. Arkhimedes keksi tehokkaan tavan laskea kahden säännöllisen monikulmion pinta-alan välinen erotus tapauksessa, jossa monikulmioiden kärjet ovat ympyrän kehällä ja toisessa monikulmiossa on kaksinkertainen määrä kärkiä toiseen monikulmioon verrattuna. Tätä oivallusta hyödyntäen luvulle $\pi$ saatiin laskettua jo antiikin aikana hyviä arvioita.

Kahden neliöjuurta tai muita luonnollisten lukujen irrationaalisia neliöjuuria ei edelleen tänäkään päivänä, edes lukusuoran ja desimaalilukujen käsitteiden avulla, voida ilmaista tarkasti numeroiden avulla. Antiikin aikana kuitenkin jo keksittiin miten luonnollisten lukujen neliöjuuret voidaan ilmaista geometrisesti pelkkää harppia ja viivainta käyttämällä.



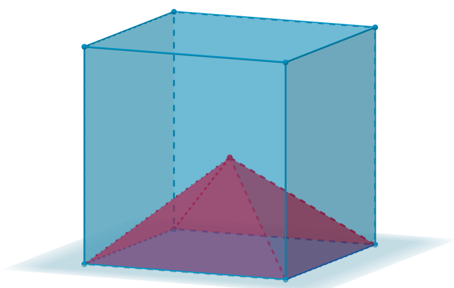

**Kuva 6:** Harppi-viivain konstruktiolla voidaan jokaista luonnollista lukua $n$ kohden piirtää suorakulmainen kolmio, jolla neliöjuuri $\sqrt{n}$ esiintyy kolmion sivun pituutena. Tätä varten piirretään ensin yksikköjana. Yksikköjanan avulla piirretään jana $AB$, jonka pituus on $n+1$. Merkitään janalta piste $C$, jolla toteutuu $|AC| = n$ ja $|CB| = 1$. Piirretään pisteen $C$ kautta kulkeva normaali janalle $AB$. Määritetään sitten janan $AB$ keskipiste $D$ ja piirretään kuvan ympyrä. Merkitään saadun ympyrän ja normaalin leikkauspistettä kirjaimella $E$ ja pituutta $|CE|$ kirjaimella $x$. Tällöin suorakulmaiset kolmiot $ACE$ ja $ECB$ ovat yhdenmuotoisia, joten niiden vastionosien suhteet ovat samat. Tästä voidaan ratkaista janan $CE$ pituus $x = \sqrt{n}$.

Antiikin geometriassa mietittiin myös kysymystä luvun $\pi$ neliöjuuren geometrisen konstruktion olemassaolosta. Tämän ympyrän neliöimiseksi kutsutun ongelman ratkaisu antoi kuitenkin odottaa itseään aina modernille ajalle asti. Tällöin osoitettiin, että mielivaltaisesta ympyrästä ei ole harpin ja viivaimena avulla mahdollista konstruoida neliötä, jolla on ympyrän kanssa sama pinta-ala. Toisin muotoilemalla tämä tulos kertoo, että yksikköjanasta ei voida geometrisesti muodostaa janaa, jonka pituus on $\sqrt{\pi}$.

## Tilavuuksien ja pinta-alojen suhteita

Antiikin kreikkalaiset olivat kiinnostuneita tasogeometrian lisäksi avaruusgeometriasta, mutta se ei kehittynyt antiikin aikana yhtä pitkälle kuin kaksiulotteinen vastineensa. Antiikissa saatiin kuitenkin selville peruskappaleiden, kuten pallon, lieriön ja kartion, pinta-alojen ja tilavuuksien väliset suhteet. Lisäksi onnistuttiin luokittelemaan kaikki säännölliset monitahokkaat.

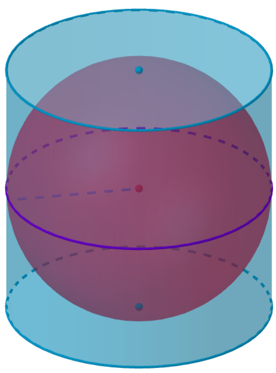
Kolmion pinta-alan tuttu kaava kolmion kannan ja korkeuden suhteen voidaan ilmaista antiikin ajan hengessä myös kolmion ja suorakulmion pinta-alan suhteena: *Kolmion pinta-ala on puolet sellaisen suorakulmion pinta-alasta, jolla on sama kanta ja korkeus kuin kolmiolla.*



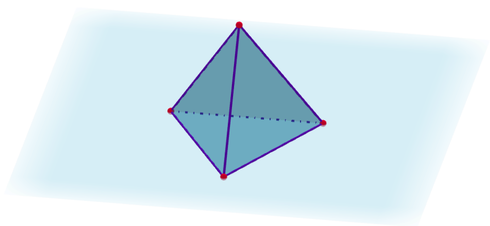
**Kuva 7:** Eudoksos johti pyramidin tilavuuskaavan huomaamalla, että kuutio voidaan jakaa kuudeksi yhteneväksi pyramidiksi.

Eudoksos pohti kolmion ja suorakulmaisen särmiön pinta-alojen suhteen analogiaa pyramidin ja suorakulmaisen särmiön tilavuuksien suhteille. Eudoksos huomasi, että kuutio voidaan jakaa kuudeksi yhteneväksi pyramidiksi. Saman idean avulla voitiin osoittaa, että pyramidin ja suorakulmaisen särmiön tilavuuksien suhde on aina yhden suhde kolmeen, mikäli niillä on yhtenevä pohja ja sama korkeus. Tämä tulos pystyttiin yleistämään jo antiikin aikana koskemaan myös ympyräkartion ja -lieriön tilavuuksien suhdetta.

Eudoksoksen lisäksi myös Arkhimedes oli kiinnostunut avaruuskappaleiden tilavuuksien suhteista. Arkhimedes tutki avaruuskappaleiden tilavuuksia täyttämällä avaruuskappaleet pienillä kuutioilla ja laskemalla kuutioiden tilavuuksien summan. Arkhimedes selvitti esimerkisi ympyrän, pallon ja ympyrälieriön pinta-alojen ja tilavuuksien väliset suhteet.



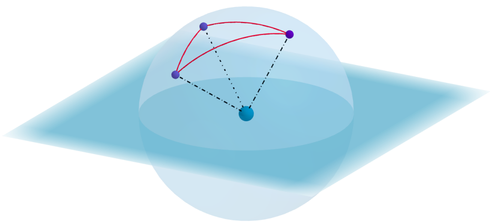
**Kuva 8:** Kuvan punaisella pallolla $P$, sinisellä suljetulla sylinterillä $L$ ja lilareunaisella ympyrällä $Y$ on kaikilla sama säde $r$. Sylinterin $L$ korkeus on $2r$. Arkhimedes osoitti, että punaisen pallon $P$ pinta-ala on neljä kertaa lilareunaisen ympyrän $Y$ pinta-ala, eli yhtälö $\mathrm{Ala}(P) = 4\,\mathrm{Ala}(Y)$ pätee. Lisäksi hän osoitti, että pallon $P$ pinta-ala on kaksi kolmasosaa sinisen sylinterin $L$ pinta-alasta, eli yhtäsuuruus $\mathrm{Ala}(P) = 2/3\,\mathrm{Ala}(L)$ on voimassa. Hän osoitti myös, että pallon $P$ ja sylinterin $L$ tilavuuksien suhde on sama kuin niiden pinta-alojen välinen suhde. Tästä saadaan yhtäsuuruudet $\mathrm{Vol}(P)/\mathrm{Vol}(L) = \mathrm{Ala}(P)/\mathrm{Ala}(L) = 2/3$.



**Kuva 9:** Kuvassa on tetraedriksi kutsuttu säännöllinen monitahokas eli Platonin kappale. Tetraedrin tahkot ovat tasasivuisia kolmioita ja kolme sivutahkoa kohtaavat sen kärjissä. Säännölliset monitahokkaat ovat yleisesti säännöllisten monikulmioiden avaruudellisia vastineita. Niiden tahkot ovat keskenään yhteneviä säännöllisiä monikulmioita ja niiden kärjissä kohtaavien sivutahkojen lukumäärä on vakio.

Antiikin kreikalaiset pohtivat myös säännöllisten monikulmioiden avaruudellisten vastineiden, Platonin kappaleiden, olemassaoloa. He osoittivat, että niitä on olemassa täsmälleen viisi erilaista: tetraedri, oktaedri ja ikosaedri, joiden tahkot ovat tasasivuisia kolmiota, heksaedri, jonka tahkot ovat neliöitä, ja dodekaedri, jonka tahkot ovat säännöllisiä viisikulmioita.

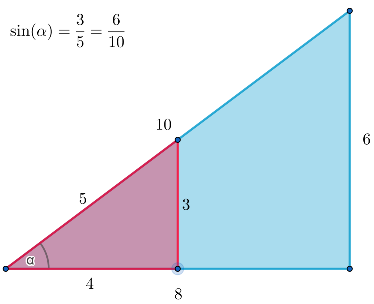
## Trigonometriaa hyödyntäen ympyrää ja yhdenmuotoisia kolmioita



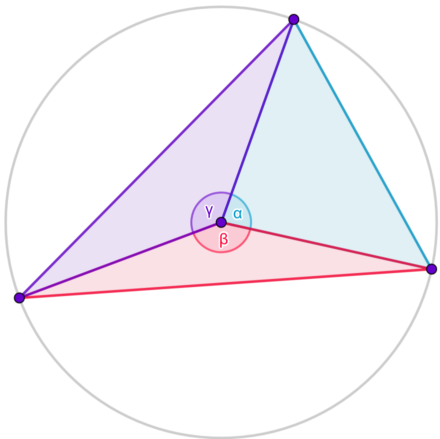
**Kuva 10:** Taivaankappaleet öisellä taivaalla näyttivät muodostavan kolmioita pallonkuorelle. Trigonometria sai alkunsa niiden ihmettelystä.

Trigonometria kehittyi antiikin aikana yhdessä tähtitieteen kanssa. Antiikin aikana elettiin vielä maakeskisessä maailmankuvassa, jossa taivas kaareutui maan yllä. Tähtitieteen motivoima antiikin trigonometria keskittyi tästä syystä pallonkuorella esiintyvien kolmioiden tutkimiseen. Trigonometrian avulla pyrittiin selvittämään planeettojen ratoja, maapallon kokoa sekä maan, kuun ja auringon suhteellisia etäisyyksiä. Antiikin ajan merkittävin trigonometrinen teos on Ptolemaioksen 100-luvulle sijoittuva *Almagest*, jossa trigonometrian lisäksi esitetään ptolemaiolainen maakeskinen käsitys maailmankaikkeudesta, joka oli vallalla Kopernikuksen aikaan asti.

Trigonometriassa tutkitaan kolmioiden kulmien ja sivujen pituuksien suhteita. Tason trigonometria perustuu kahteen euklidiseen geometriaan pohjautuvaan tulokseen. Ensimmäisen mukaan yhdenmuotoisissa kolmiossa vastiosien suhteet ovat samat. Toisen mukaan suorakulmaisen kolmion kulmat, ja siten koko suorakulmainen kolmio, voidaan määrittää yksikäsitteisesti kolmion kahden sivun pituuden suhteesta.




**Kuva 11:** Yhdenmuotoisissa kolmioissa vastinosien, vastinkulmien ja vastinsivujen suhteet ovat samat. Tästä syystä minkä tahansa kolmion trigonometriset ominaisuudet voidaan selvittää kolmion kanssa yhdenmuotoisessa kolmiossa. Kulman $\alpha$ sini on kulman vastaisen sivun pituuden suhde kolmion hypotenuusan pituuteen. Kulman sini määrää yhdessä kulman vastaisen sivun pituuden ja kolmion hypotenuusan pituuden kanssa suorakulmaisen kolmion yksikäsitteisesti.




**Kuva 12:** Ympyrän sisälle voidaan piirtää mielivaltaisen kolmion kanssa yhdenmuotoinen kolmio, jonka kärjet ovat ympyrän kehällä. Tästä syystä trigonometriaa tehdään yleensä käyttäen standardia ympyrää, kuten yksikköympyrää. Kolmion kärkien ollessa ympyrän kehällä tulee kolmion sivuista ympyrän jänteitä. Kolmion voidaan esittää, yhdistettä ja leikkausta käyttämällä, kolmen sellaisen tasasivuisen kolmion avulla, joiden pohjakateetit ovat ympyrän jänteitä ja sivukateetit ympyrän säteitä. Hippaharkos kirjasi trigonometrisia tutkimuksiaan varten taulukkoon kahtakymmentä keskuskulmaa vastaavat jänteen pituudet erään ympyrän suhteen. Taulukon avulla voidaan selvittää sini kulmalle, joka on puolet taulukossa esiintyvästä keskuskulmasta.

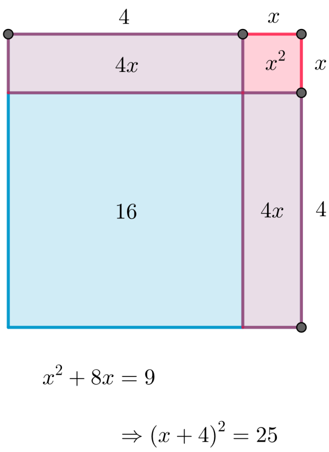
Trigonometriaa on tehty, sen syntyhetkestä lähtien, ympyrää ja yhdenmuotoisia kolmioita hyödyntäen. Trigonometrian lasketaan alkaneen Hippharkoksesta, joka teki kolmion ja ympyrän suhdetta koskevan tärkeän huomion 100-luvulla. Hän keksi, että kolmion kärkien kautta voidaan piirtää ympyrä, jolloin kolmion sivuja voidaan aina ajatella ympyrän jänteinä. Hippharkos teki trigonometrisia tutkimuksia varten taulukon kahdestakymmenestä ympyrän jänteen pituudesta vastaavan keskuskulman suhteen. Tätä taulukkoa pidetään matematiikan historian ensimmäisenä trigonometrisena taulukkona.

## Yhtälöiden ratkaisemista algebran säännöillä

Algebra tulee arabian sanasta al-jabr ja se tuli osaksi matematiikkaa 800-luvulla vaikuttaneen persialaisen matematikon Al-Khwarizmin arabiankielisen kirjan *Al-jabr w'al muqabala* (Palautumisen ja vastustamisen taito) kautta. Teoksessa käsitellään yhtälöiden ratkaisemista. Nimessä esiintyvällä sanalla *palautuminen* viitataan saman termin lisäämiseen yhtälön kummallekin puolelle ja sanalla *vastustaminen* viitataan yhtälön puolien asettamiseen yhtä suuriksi. Algebra oli kehittynyt pitkälle jo Eukleideen ja Brahmaguptan matemaattisissa töissä, mutta vasta Al-Khwarizmi alkoi käsitellä yhtälöiden ratkaisemista erillään lukuteoriasta ja geometriasta.

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava oli jossain muodossa olemassa jo muinaisessa Babyloniassa 2000-luvulla eaa. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan ensimmäinen kirjallinen muotoilu on peräisin Brahmaguptan teksteistä, jotka sijoittuvat

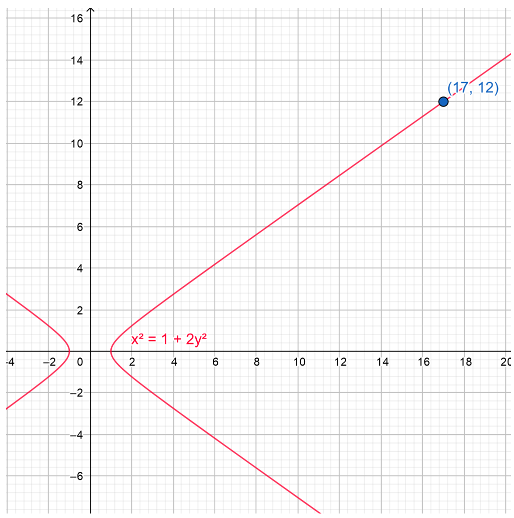
700-luvun Intiaan. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan taustalla oleva matemaattinen idea on yhtälön täydentäminen neliöksi. Neliöksi täydentämisen kautta toisen asteen yhtälöstä saadaan neliön pinta-alaa koskeva yhtälö, joka oli luonnollinen antiikin matematiikassa.




**Kuva 13:** Toisen asteen yhtälöitä osattiin taydentää neliöksi jo muinaisessa Babyloniassa. Yhtälö $x^2 + 8x = 9$ saadaan neliöksi täydentämällä muotoon $(x + 4)^2 = 25$, jolloin siitä tulee pinta-aloja koskeva yhtälö.

Kahden muuttujan toiseen asteen polynomiyhtälöitä esiintyi antiikin aikana esimerkiksi pinta-aloihin ja neliöjuuriin liittyvien ongelmien yhteydessä. Nykymatematiikasta poikkesi kuitenkin suuresti se antiikin Kreikan suurten matemaatikoiden ajatus, että yhtälön ratkaisuksi kelpasivat vain luonnolliset luvut (ja murtoluvut). Kirjassa *Arithmetica* 200-luvulla elänyt kreikkalainen matematiikko Diophantus nimittää negatiivisen luvun toteuttavaa yhtälöä $4x + 20 = 4$ mahdottomaksi. Kahden muuttujan polynomiyhtälöitä, joille etsitään kokonaislukuratkaisuja, kutsutaan nykyään Diophanteen yhtälöiksi.

Pythagoralaisten ajoista lähtien tiedettiin, että kahden neliöjuurta ei voida esittää murtolukuna. Huomattiin kuitenkin, että yhtälön $x^2 = 1 + 2y^2$ positiivisten kokonaislukuratkaisujen avulla voitiin löytää murtolukuja, jotka olivat luvun $\sqrt{2}$ lähellä. Yhtälöä tutkittiin sekä antiikin Kreikassa että Intian alueella. Intialaiset matemaatikot keksivät lopulta kaavan, jolla yhtälölle voitiin löytää äärettömästi ratkaisuja.

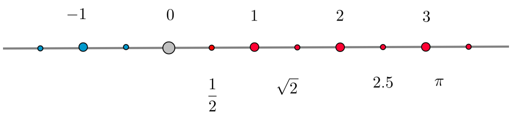



**Kuva 14:** Yhtälön $x^2 = 1 + 2y^2$ kokonaislukuratkaisusta $(x_0, y_0)$ saadaan luvulle $\sqrt{2} \approx 1,414214$ arvio murtolukuna $x_0/y_0$. Intiassa löydettiin yhtälölle ratkaisut $(17, 12)$ ja $(577, 408)$. Ratkaisut antavat luvulle $\sqrt{2}$ arviot murtolukuna kahden ja neljän desimaalin tarkkuudella, sillä $17/12 \approx 1,416667$ ja $577/408 \approx 1,414216$.

## Luvut lukusuoralla ja kuviot koordinaatistossa

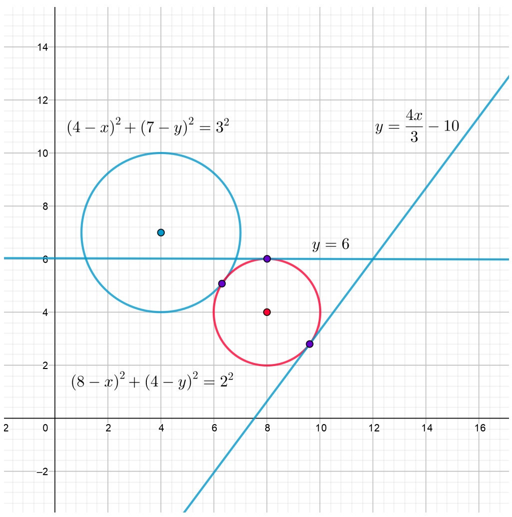
Matematiikkaa ilmaistiin pitkään tavallista kirjallista kieltä käyttämällä. Matematiikan symbolinen kieli ja kaavat yleistyivät vasta keskiajan jälkeen. Suhteita ja laskutoimituksia kuvaavat symbolit mahdollistivat matematiikan täsmällisen ja tiiviin ilmaisemisen kaavoilla.

Lukusuoralle saatiin 1600-luvulla sijoitettua reaalilukuina, algebrallisesti ja geometrisesti luontevalla tavalla, niin luonnolliset luvut, murtoluvut, irrationaaliluvut, kokonaisluvut kuin desimaaliluvutkin. Sen avulla myös negatiiviset luvut saivat modernin geometrisen tulkinnan etäisyyden käsitteen avulla. Negatiivinen luku on lukusuoralla yhtä kaukana origosta kuin positiivinen vastineensa, mutta vain eri puolella origoa.




**Kuva 15:** Luvut löysivät paikkansa lukusuoralla vasta esimodernilla ajalla.

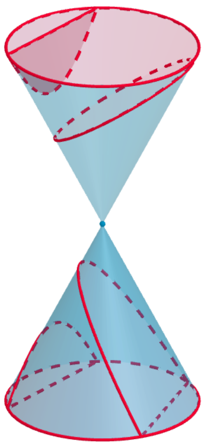
Koordinaatteja käytettiin kartoissa ja tähtitieteessä jo antiikin aikana, mutta vasta Descartes toi ne syvällisellä tavalla osaksi matematiikkaa 1600-luvulla julkaistun *La Géométrie* teoksen myötä. Karteesista tasokoordinaatistoa pidetään yhtenä matematiikan suurista innovaatioista. Karteesisessa koordinaatistossa geometrian peruskäsitteille, kuten ympyrälle ja suoralle, saatiin yhtälöt. Karteesisessa koordinaatistossa monet klassiset geometrian tulokset voitiin, analyyttisen geometrian keinoin, osoittaa puhtaasti yhtälöryhmien ratkaisuja tarkastelemalla.




**Kuva 16:** Analyyttisen geometrian keinoin monet klassiset geometrian tulokset saivat uuden analyyttisen todistuksen. Descartes antoi analyyttisen ratkaisun Apolloniuksen klassiselle ongelmalle, jossa tehtävänä on määrittää kaikki ympyrät, joka sivuavat kolmea annettua geometrista objektia. Annetut objektit voivat olla suoria, ympyröitä tai pisteitä. Kuvassa punainen ympyrä on Apolloniuksen ongelman ratkaisu sinisten suorien ja sinisen ympyrän tapauksessa.

## Kartioleikkaukset kuvaajina

Paraabelit, hyperbelit ja ellipsit tulivat osaksi matematiikkaa antiikin kartioleikkauksina. Matematiikan kehitys on tuonut niihin monta uutta näkökulmaa. Apollonius käsitteli valtaosan teoreettisesti mielenkiintoisista tuloksista niihin liittyen jo antiikin aikana. Avaruudesta tasoon ne siirtyivät vasta 1000-luvun arabialaisessa matematiikassa. Modernin tulkintansa kahden muuttujan toisen asteen polynomiyhtälöiden kuvaajina ne saivat karteesisessa koordinaatistossa parituhatta vuotta ensiesiintymisensä jälkeen.



**Kuva 17:** Sinisen kartion pinnalla oleva paraabeli, hyperbeli ja ellipsi saadaan leikkaamalla kartiota tasolla sopivista suunnista. Paraabeli, ellipsi ja hyperbeli esiintyivät antiikin ajan matematiikassa tällaisina kartioleikkauksina. Keskiajalla niitä alettiin käsitellä tason objekteina, mutta vasta esimodernilla ajalla huomattiin, että ne ovat toisen asteen polynomiyhtälöiden kuvaajia.

Kartioleikkausten luontevaa sijoittumista karteesiseen koordinaatistoon vakuutti tiedeyhteisön nopeasti uuden lähestymistavan, analyyttisen geometrian, nerokkuudesta. Matematiikan kielen kehittymisen ja analyyttisen geometrian myötä matematiikan historiassa kääntyi uusi sivu, joka sisältää paljon kiehtovaa, uutta ja ihmeellistä matematiikkaa. Se on jo kuitenkin aivan toinen tarina se.

## Kirjallisuus ja kiitokset

Teksti perustuu pääosin J. Stillwellin kirjaan Mathematics and its history, Springer-Verlag New York Inc. 1989. Lisäksi ideoita on tullut kirjoista Tieteiden kunigatar I ja II, Art House, WSOY:n graafiset laitokset Juva, 1995. Artikkelin kuvat olen tehnyt GeoGebra-ohjelmalla. Kiitän käsikirjoituksen lukemisesta ja arvokkaista kommenteista professori Juha Oikkosta, Melike Öziä sekä Johan Janssonia.