For prof. E. Arias.

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

Серия „А“

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

№ 8

КИЕВ — 1980

Математика

УДК 519.21

Е. АРИАС, академик АН УССР В. С. КОРОЛЮК

СТАЦИОНАРНОЕ ФАЗОВОЕ УКРУПНЕНИЕ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Для описания функционирования различных сложных стохастических систем целесообразно применять развитую теорию марковских процессов восстановления (МПВ) ([1, 2]). Однако даже для сравнительно простых систем фазовое пространство (а с ним и аналитические характеристики) МПВ, описывающих функционирование систем, оказывается довольно сложным.

Естественным методом, упрощающим анализ сложных МПВ, является метод фазового укрупнения сложных систем [2, 3], алгоритмы которого эффективны для систем, близких к эргодически расщепляемым.

Оказывается, что алгоритмы фазового укрупнения имеют еще и другое содержание: они определяют фазовое укрупнение эргодических МПВ в установившемся режиме. Сформулированная ниже теорема * обосновывает применимость формул фазового укрупнения при произвольном расщеплении фазового пространства состояний.

Марковским процессом восстановления (МПВ) называется двумерная цепь Маркова $(\xi_n, \theta_n, n \geqslant 0)$ со значениями в $E \times [0, \infty)$, переходные вероятности которой задаются полумарковским ядром [2]

$$Q(t, x, A) = P(\xi_{n+1} \in A, \ \theta_{n+1} \leqslant t / \xi_n = x). \tag{1}$$

Первая компонента МПВ $(\xi_n, n \geqslant 0)$ образует вложенную цепь Маркова в измеримом фазовом пространстве $(E, \mathscr{E})$ с переходными вероятностями

$$P(x, A) = P(\xi_{n+1} \in A / \xi_n = x) = Q(+\infty, x, A). \tag{2}$$

Неотрицательные случайные величины θ_n, $n \geqslant 1$, $(\theta_0 = 0)$ определяют время восстановления (интервалы между моментами восстановления), имеющие функции распределения

$$G_x(t) = P(\theta_{n+1} \leqslant t / \xi_n = x) = Q(t, x, E). \tag{3}$$

Удобно времена восстановления с функцией распределения $G_x(t)$ обозначать $\theta_x : P(\theta_x \leqslant t) = G_x(t)$.

Будем предполагать эргодичность вложенной цепи Маркова $(\xi_n, n \geqslant 0)$ в следующем смысле:

$$\exists \lim_{n \to \infty} P(\xi_n \in A / \xi_0 = x) = \rho(A), \ \forall x \in E, \ A \in \mathscr{E}. \tag{4}$$

Пусть задано расщепление фазового пространства $E = \bigcup_{k=1}^{N} E_k$, $E_k \cap \cap E_r = \varnothing$, $k \neq r$, такое, что стационарное распределение $(\rho(A), A \in \mathscr{E})$ цепи

* Формулировка теоремы предложена В. С. Королюком, ее доказательство — Е. Ариасом.

Маркова $(\xi_n,\ n \geqslant 0)$ обладает свойством

$$\rho(E_k) > 0, \qquad \forall k = \overline{1, N}. \tag{5}$$

Введем укрупненный МПВ $(\hat{\xi}_n,\ \hat{\theta}_n,\ n \geqslant 0)$ со значениями в $\hat{E} \times [0, \infty)$, $\hat{E} = \{1, 2, \dots, N\}$, переходные вероятности которого задаются полумарковской матрицей

$$\hat{Q}_{kr}(t) = \hat{p}_{kr}\hat{G}_{kr}(t). \tag{6}$$

Переходные вероятности цепи Маркова $(\hat{\xi}_n,\ n \geqslant 0)$ задаются формулами фазового укрупнения [3]

$$\hat{p}_{kr} = P(\hat{\xi}_{n+1} = r / \hat{\xi}_n = k) = \int\limits_{E_k} \rho(dx) P(x, E_r)/\rho(E_k); \qquad k, r = \overline{1, N}. \tag{7}$$

Функции распределения $\hat{G}_{kr}(t)$ времен восстановления $\hat{\theta}_n$ задаются формулами

$$\hat{Q}_{kr}(t) = P(\hat{\theta}_{n+1} \leqslant t / \hat{\xi}_n = k, \hat{\xi}_{n+1} = r) = \int\limits_{E_k} \rho(dx) Q(t, x, E_r)/\rho(E_k);$$

$$k, r = \overline{1, N}. \tag{8}$$

Определим моменты входа исходной цепи Маркова $(\xi_n,\ n \geqslant 0)$ в подмножество E_k

$$\tau_m^{(k)} = \inf\{n > \tau_{m-1} : \xi_n \in E_k\}, \qquad \tau_0 = 0,\ m \geqslant 1. \tag{9}$$

Теорема. В предположении эргодичности вложенной цепи Маркова (4) и условия (5) имеет место следующий предельный результат:

$$\lim_{m \to \infty} P(\xi_{\tau_m^{(k)}+1} \in E_r) = \hat{p}_{kr}; \tag{10}$$

$$\lim_{m \to \infty} P(\theta_{\tau_m^{(k)}+1} \leqslant t;\ \xi_{\tau_m^{(k)}+1} \in E_r) = \hat{Q}_{kr}(t). \tag{11}$$

Доказательство основано на рассмотрении двумерной цепи Маркова $\zeta_n = (\xi_n, \xi_{n+1})$, $n \geqslant 0$ в пространстве $E \times E$ со стационарным распределением [5]

$$\tilde{\rho}(dx_1 dx_2) = \rho(dx_1) P(x_1, dx_2). \tag{12}$$

Рассмотрим множество $A_k = E_k \times E$. Моменты входа $\tau_m^{(k)}$ цепи ξ_n в E_k являются моментами входа цепи ζ_n во множество A_k. Цепь Маркова $(\zeta_{\tau_m}^{(k)},\ m \geqslant 1)$ эргодическая на множестве A_k со стационарной мерой [5]

$$\rho_k(dx_1 dx_2) = \tilde{\rho}(dx_1 dx_2)/\tilde{\rho}(A_k). \tag{13}$$

Из (12) и (13), очевидно, имеем

$$\rho_k(dx_1 dx_2) = \rho(dx_1) P(x_1, dx_2)/\rho(E_k). \tag{14}$$

Теперь условия эргодичности дают

$$\lim_{m \to \infty} P(\xi_{\tau_m^{(k)}+1} \in E_r) = \lim_{m \to \infty} P(\zeta_{\tau_m^{(k)}} \in E_k \times E_r) = \int\limits_{E_k} \rho(dx) P(x, E_r)/\rho(E_k),$$

т. е. (10) (см. (7)).

Далее, в силу марковского свойства моментов входа $\tau_m^{(k)}$ имеем

$$P(\theta_{\tau_m^{(m)}+1} \leqslant t;\ \xi_{\tau_m^{(k)}+1} \in E_r) = \int\limits_{E_k} P(\theta_{\tau_m^{(k)}+1} \leqslant t;\ \xi_{\tau_m^{(k)}+1} \in E_r / \xi_{\tau_m^{(k)}} = x) P^{(m)}(dx) =$$

$$= \int\limits_{E_k} Q(t, x, E_r) P^{(m)}(dx), \tag{15}$$

где $P^{(m)}(dx) = P(\xi_{\tau_m^{(k)}} \in dx)$.

Так как цепь Маркова $(\xi_{\tau_m^{(k)}},\ m \geqslant 1)$ эргодическая на множестве E_k со стационарным распределением $\rho(dx)/\rho(E_k)$, то, переходя к пределу в (15), получим соотношение (11) с учетом (8). Из сформулированной теоремы следуют важные для приложений рекомендации.

Марковский процесс восстановления с эргодической вложенной цепью Маркова можно укрупнять с произвольным расщеплением фазового пространства состояний, удовлетворяющим условию (5). В результате укрупненный процесс (на укрупненном фазовом пространстве состояний) снова будет марковским процессом восстановления, характеристики которого вычисляются по формулам (7) и (8).

Практически рекомендации по стационарному фазовому укрупнению МПВ выглядят следующим образом:

1. Выбирается расщепление фазового пространства состояний

$$E = \bigcup_{k=1}^{N} E_k, \quad E_k \cap E_r = \varnothing, \quad k \neq r. \tag{16}$$

Обычно выбор расщепления (16) определяется техническими рекомендациями объединения однотипных (в определенном смысле) фазовых состояний. Разбиение (16) может производиться также по физическим свойствам фазовых состояний. Например, при построении исходного МПВ, описывающего функционирование данной системы, возникает необходимость расширения физических состояний системы, которое обеспечивает полумарковское свойство. В этом случае физические состояния системы задают естественное расщепление фазового пространства состояний, моделирующего МПВ.

2. Вводится функция укрупнения, соответствующая расщеплению (16):

$$u(x) = k, \quad x \in E_k, \qquad \forall k = \overline{1, N}.$$

3. Рассматривается укрупненный МПВ $(\hat{\xi}_n,\ \hat{\theta}_n,\ n \geqslant 0)$ с характеристиками (6) и (7) в качестве модели исходного процесса, начиная с некоторого момента времени T:

$$\tilde{\xi}_n^T = u(\xi_{T+n}),\ \tilde{\theta}_n^T = \theta_{T+n}, \qquad n \geqslant 0.$$

Время T выбирается таким образом, чтобы можно было считать исходный процесс после момента T находящимся в установившемся режиме.

Заметим, что вложенная цепь Маркова $(\hat{\xi}_n,\ n \geqslant 0)$ укрупненного МПВ имеет виртуальные переходы, которые при желании могут быть устранены известным приемом. Переходные вероятности вложенной цепи без виртуальных переходов имеют вид

$$\hat{p}_{kr}^{0} = \int\limits_{E_k} \rho(dx) P(x, E_r) / \int\limits_{E_k} \rho(dx) P(x, \overline{E}_k). \tag{17}$$

Здесь

$$\overline{E}_k = E \setminus E_k.$$

S u m m a r y

The paper is concerned with stationary state space lumpability of the Markov renewal processes with arbitrary state space.

1. *Cinlar E.* On semi—Markov processes on arbitrary space.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1969, **66**, N 2, p. 381—392.
2. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения.—Киев: Наук. думка, 1976.—184 с.
3. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Фазовое укрупнение сложных систем.— Киев : Вища школа, 1978.—111 с.
4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения.— М. : Мир, 1967. Т. 2.— 752 с.
5. *Orey S.* Lecture Notes on Limit Theorems for Markov Chain Transition Probabilies, Van Nostrand, 1971, N 4.—265 p.

Институт математики
АН УССР

Поступило
25.IV 1980 г.

УДК 517.55

А. В. БОНДАРЬ

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ, ОБЛАДАЮЩИХ ПОСТОЯННЫМ ОПЕРАТОРОМ РАСТЯЖЕНИЯ ВДОЛЬ КОНУСОВ

(Представлено академиком АН УССР Ю. А. Митропольским)

Пусть D — область в $\mathbf{C}^n$, $f: D \to \mathbf{C}^n$ — отображение и пусть $\tilde{\mathcal{E}} = \{\{z_1^k\}_{k=1}^{\infty}, \ldots, \{z_n^k\}_{k=1}^{\infty}\}$ — репер последовательностей в точке $z \in D$ с касательным репером $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$, то есть $\lim\limits_{k\to\infty} z_j^k = z \ \forall j$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{z_j^k - z}{\| z_j^k - z \|} = e_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, причем пусть $z_j^k \in D \ \forall j, k$. Для любого $k = 1, 2, \ldots$ определим $\mathbf{C}$ — линейный оператор $A_k: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$, действующий на базисные векторы $e_j \in \mathcal{E}$ по формуле

$$A_k e_j = \frac{f(z_j^k) - f(z)}{\| z_j^k - z \|}.$$

Пусть $R_k = (A_k \cdot A_k^*)^{1/2}$ — операторный модуль оператора A_k.

Определение 1. Будем говорить, что отображение f обладает в точке z ограниченным постоянным оператором растяжения $R_{z\tilde{\mathcal{E}}}$ вдоль репера последовательностей $\tilde{\mathcal{E}}$, если последовательность $\{R_k\}$ сходится в пространстве $\mathbf{L}(n)$ $\mathbf{C}$-линейных операторов к оператору $R_{z\tilde{\mathcal{E}}}$. Скажем, далее, что f обладает в точке z ограниченным постоянным оператором растяжения R_{zM} вдоль множества $M \subset D$, если для любого репера последовательностей $\tilde{\mathcal{E}} = \{\{z_1^k\}_{k=1}^{\infty}, \ldots, \{z_n^k\}_{k=1}^{\infty}\}$ в точке z такого, что $z_j^k \in M \cap D$, f обладает в точке z постоянным оператором растяжения $R_{z\tilde{\mathcal{E}}}$ вдоль $\tilde{\mathcal{E}}$ и $R_{z\tilde{\mathcal{E}}} = R_{zM}$ $A\tilde{\mathcal{E}}$ $\tilde{\mathcal{E}} \subset M$.