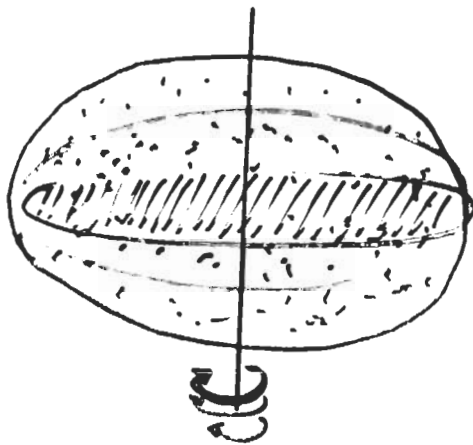


6. Linnunradan rotaatio

6.1 Historiallinen katsaus

B. Lindblad (1926): Linnunradassa useita **alisysteemejä** joilla kullakin erilainen rotaationopeus ja vastaavasti erilainen litistyneisyys.

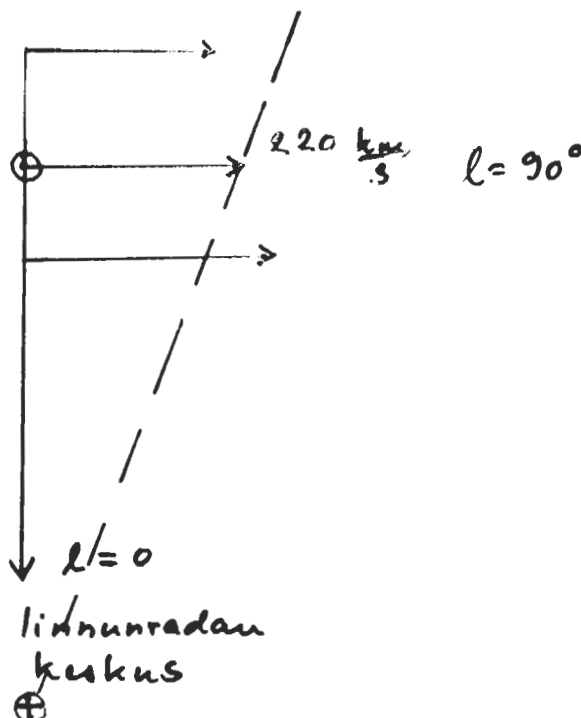


-Linnunradan keskus on pallomaisten joukkojen muodostaman systeemin keskuksessa (Shapley 1918)

-Auringon lähiympäristön tähtien enemmistö kuuluu samaan alisysteemiin kuin aurinko:
=> nopeudet auringon suhteen pieniä (n. 10 - 50 kms⁻¹)

-pallomaisten joukkojen alisysteemin rotaationopeus on pieni:
=> nopeudet auringon suhteen ovat suuria (n. 100 - 200 kms⁻¹)

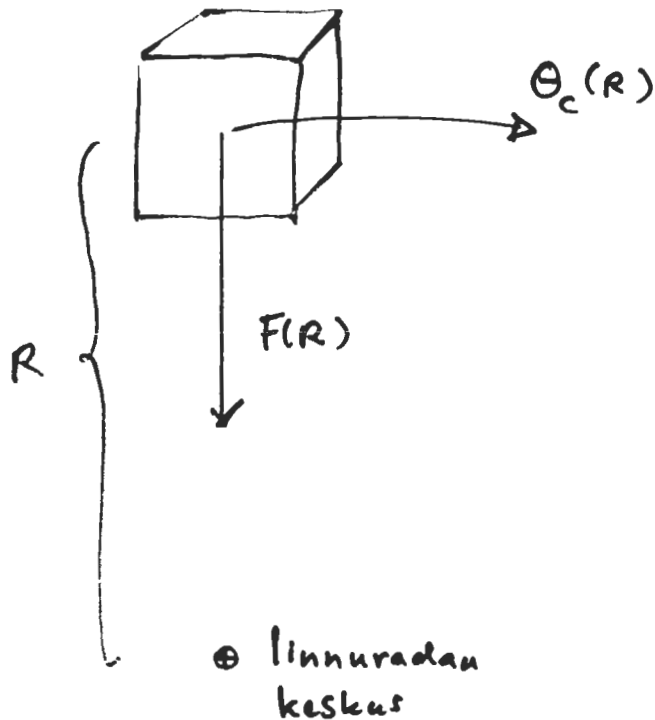
J. H. Oort (1927-28): Linnunradan rotaatio voidaan verifioida havaintojen avulla. Se ei voi olla jäykän kappaleen rotaatiota, vaan sisempänä olevien



tähtien kulmanopeus on suurempi, ts. kyseessä on differentiaalinen rotaatio. Tämä aiheuttaa havaittavia efektejä tähtien radiaalinopeuksissa ja ominaisliikkeissä.

6.2. Oort-Lindbladin teoria Linnunradan rotaatiosta: Pääpiirteet

a) Linnunradan tasossa tarkastellaan tilavuusalkiota. Siinä olevien tähtien keskimääräinen liike on ympyräliike Linnunradan keskuksen ympäri.



$\Theta_c(R)$ = nopeus ympyräliikkeessä

$F(R)$ = keskeiskiihtyvyys

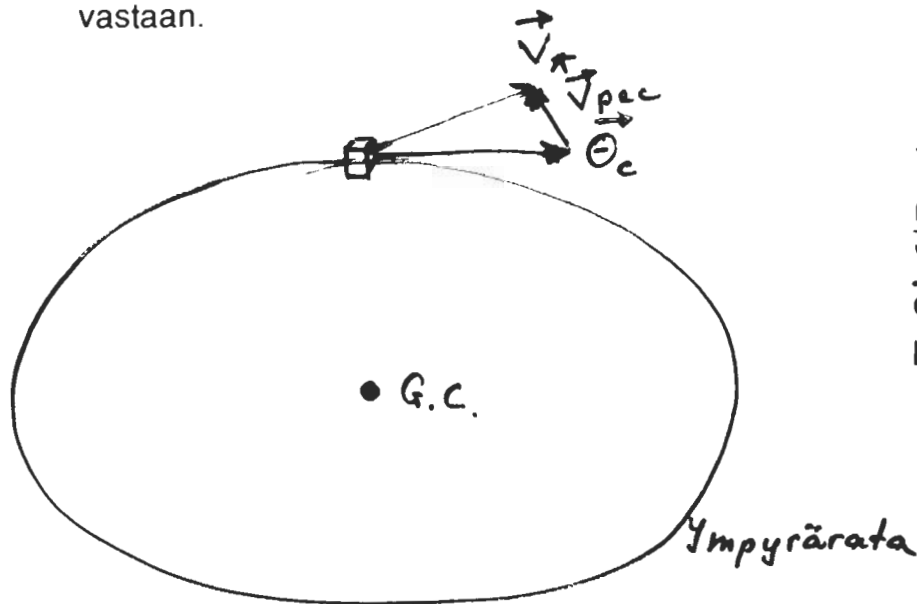
$$F(R) = \frac{[\Theta_c(R)]^2}{R}$$

-Rotaatiosuunta sama kaikissa Linnunradan osissa ja kaikille alisysteemeille.

- $\Theta_c(r)$ riippuu etäisyydestä Linnunradan keskukselta (Auringon etäisyydellä ($R = 8.5$ pc) on $\Theta_c(R) = 220$ kms⁻¹)

b) Tilavuusalkion ollessa vähän galaksin tason ylä- tai alapuolella ($|z|/R \ll 1$), sen liike on sama kuin sen galaksin tasossa olevan projektion liike.

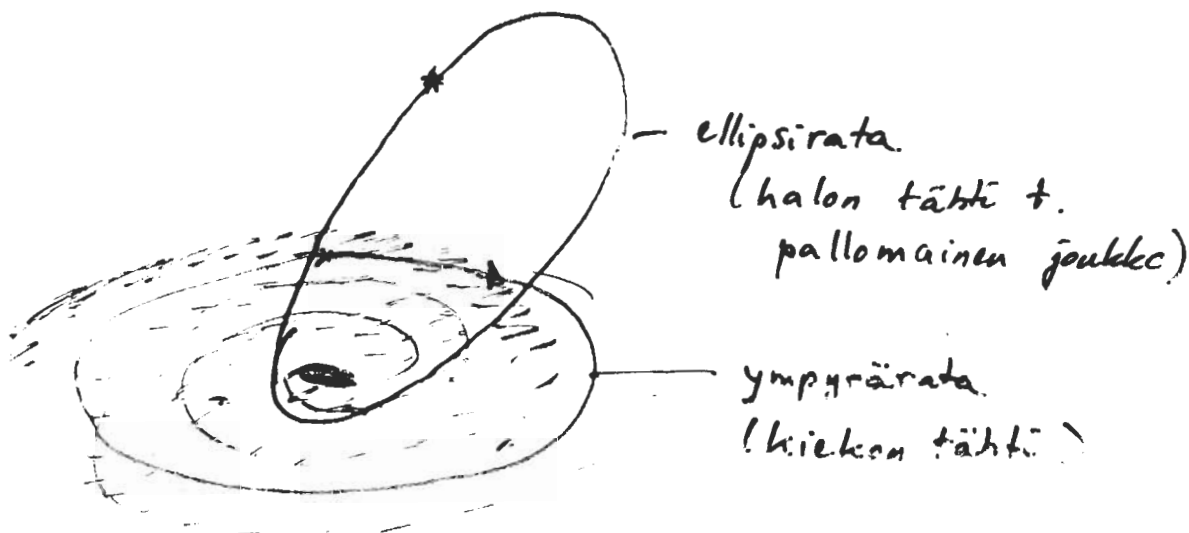
c) Tähtien pekuliaariset liikkeet ko. tilavuusalkiossa johtuvat siitä, että yksityisten tähtien radat eivät ole tarkkaan ympyräratoja, vaan ovat hieman eksentrisiä ja niillä on pienet kaltevuuskulmat Linnunradan tasoa vastaan.



Tähden pekuliaarinen

nopeus
 $\vec{V}_{\text{pec}} = \vec{V} - \vec{\Theta}_c$, jossa
 $\vec{\Theta}_c$:n suunta on
 $l = 90^\circ, b = 0^\circ$

d) Edellä esitetyt kohdat a)-c) pätevät useimmille auringon lähiympäristön tähdille, joiden alisysteemi muodostaa voimakkaasti litistyneen systeemin. Hitasti pyöriville, vain vähän litistyneille halo-populaation alisysteemeille ei oletus ympyräradoista päde. Näiden kohteiden radat ovat lisäksi voimakkaasti kallellaan linnunradan tasoa vastaan.



Linnunradan rotaatiota tutkittaessa sopiva koordinaatisto on
Fundamental Standard of Rest (=FSR)

Koordinaatisto ei liiku auringon mukana vaan on levossa kaukaisten galaksien suhteen.

Koordinaattiakselit:

$$\Theta (l = 90^\circ, b = 0^\circ)$$

$$\Pi (l = 180^\circ, b = 0^\circ)$$

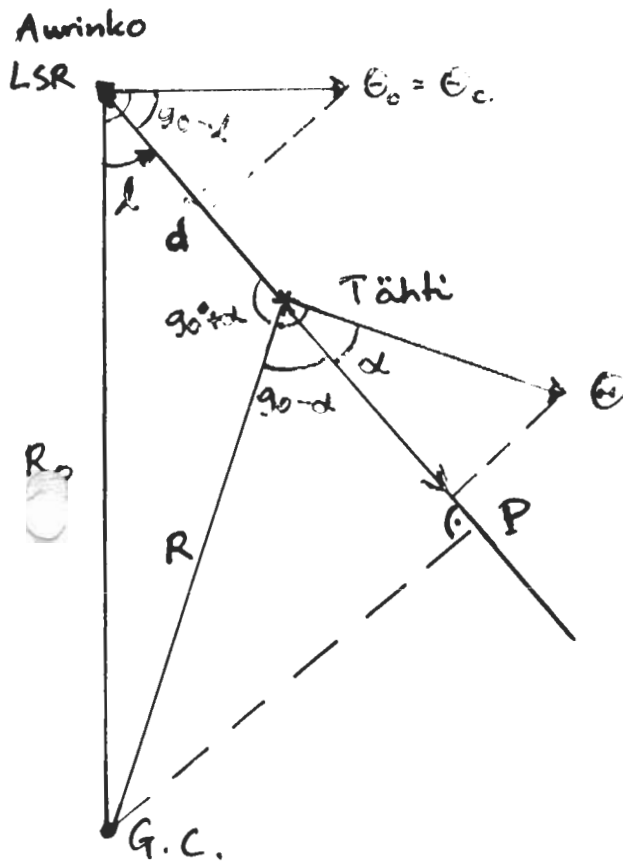
$$Z (b = 90^\circ)$$

LSR:n koordinaatit FSR:ssä ovat siten:

$$\Theta_{\text{LSR}} = \Theta_c = \text{ympyräliikkeen nopeus}$$

$$\Pi_{\text{LSR}} = 0 ; Z_{\text{LSR}} = 0.$$

6.3. Differentiaalisen rotaation vaikutus tähtien radiaalinopeuksiin ja ominaisliikkeisiin



Radiaalinopeus:

$$v_r = \Theta \cos \alpha - \Theta_0 \sin l$$

$$\frac{\sin l}{R} = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{R_0} = \frac{\cos \alpha}{R_0}$$

$$v_r = \frac{\Theta}{R} \cdot R_0 \sin l - \Theta_0 \sin l$$

$$\text{Kulmanopeus } \omega = \frac{\Theta}{R} ; \omega_0 = \frac{\Theta_0}{R_0}$$

$$v_r = R_0(\omega - \omega_0) \sin l$$

Tangentialnopeus:

$$t_l = t = \Theta \sin \alpha - \Theta_0 \cos l$$

t positiivinen kasvavan l:n suunnassa

Kolmiosta Aurinko - G.C. - P : $R \sin \alpha = R_0 \cos l - d$

$$t = \frac{\Theta}{R} (R_0 \cos l - d) - \Theta_0 \cos l$$

$$t = R_0(\omega - \omega_0) \cos l - \omega d$$

Näitä v_r :n ja t :n lausekkeita johdettaessa käytettiin vain oletusta, että radat ovat ympyrä ratoja. Tähtiä havaittaessa ovat etäisyydet $d \leq 2 - 3 \text{ kpc} \ll R_0 = 8.5 \text{ kpc}$. Tällöin voidaan käyttää em. kaavoista johdettuja approksimaatioita, jotka tunnetaan **Oortin kaavoina**.

Oortin kaavat:

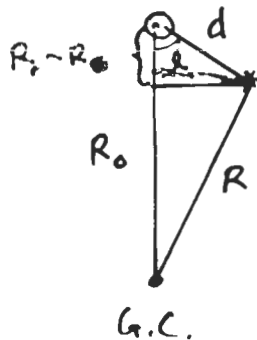
Sekä v_r :n että t :n lausekkeissa esiintyy $\omega - \omega_0$. Kehitetään se Taylorin sarjaksi:

$$\omega(R) - \omega(R_0) = \omega - \omega_0 = (d\omega/dR)_{R_0}(R - R_0) + \dots \quad (2. \text{ ja korkeamman asteen termit jätetään pois.})$$

$$d\omega/dR = \frac{d\left(\frac{\Theta}{R}\right)}{dR} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{d\Theta}{dR} \cdot R - \Theta \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{d\Theta}{dR} - \frac{\Theta}{R} \right)$$

$$R = R_0 : (d\omega/dR)_{R_0} = \frac{1}{R_0} \left[\left(\frac{d\Theta}{dR} \right)_{R_0} - \frac{\Theta_0}{R_0} \right]$$

$$\text{siis: } \omega - \omega_0 \approx \frac{1}{R_0} \left[\left(\frac{d\Theta}{dR} \right)_{R_0} - \frac{\Theta_0}{R_0} \right] \cdot (R - R_0)$$

Radiaalinopeus:

$$v_r = R_0(\omega - \omega_0)\sin l$$

$$d \ll R_0 \Rightarrow R_0 - R = d\cos l$$

$$v_r = - \underbrace{\left[\left(\frac{d\Theta}{dR} \right)_{R_0} - \frac{\Theta_0}{R_0} \right]}_{2A} \underbrace{\sin l \cdot d \cdot \cos l}_{\frac{1}{2} d \sin 2l}$$

$$v_r = A \cdot d \cdot \sin 2l$$

$$\text{Oortin vakio } A = (1/2) \left[\frac{\Theta_0}{R_0} - \left(\frac{d\Theta}{dR} \right)_{R_0} \right]$$

$$\text{Tangentialnopeus : } t = R_0(\omega - \omega_0)\cos l - \omega d$$

$$= (\omega - \omega_0)(R_0\cos l - d) - \omega_0 d$$

$$t = - (1/R_0) \left[\left(\frac{d\Theta}{dR} \right)_0 - \frac{\Theta_0}{R_0} \right] \underbrace{d\cos l (R_0\cos l - d)}_{= d \cdot R_0 \cos^2 l - \frac{d^2 \cos l}{2. \text{asteen termi!}}} - \omega_0 d$$

$$t = \left[\frac{\Theta_0}{R_0} - \left(\frac{d\Theta}{dR} \right)_0 \right] d \cos^2 l - \left(\frac{\Theta_0}{R_0} \right) d$$

$$\cos^2 l = (1/2)(1 + \cos 2l)$$

$$t = (1/2) \left[\frac{\Theta_0}{R_0} - \left(\frac{d\Theta}{dR} \right)_0 \right] d \cos 2l + \underbrace{(1/2) \left[\frac{\Theta_0}{R_0} - \left(\frac{d\Theta}{dR} \right)_0 \right] d}_{- (1/2) \left[\frac{\Theta_0}{R_0} + \left(\frac{d\Theta}{dR} \right)_0 \right] d} - \left(\frac{\Theta_0}{R_0} \right) d$$

$$t_l = A \cdot d \cos 2l + B \cdot d$$

Tässä on Oortin vakio $B = -(1/2)[\Theta_0/R_0 + (d\Theta/dR)_{R_0}]$

$$B = -\frac{1}{2} \left[\frac{\Theta_0}{R_0} + \left(\frac{d\Theta}{dR} \right)_{R_0} \right] \quad \text{11c}$$

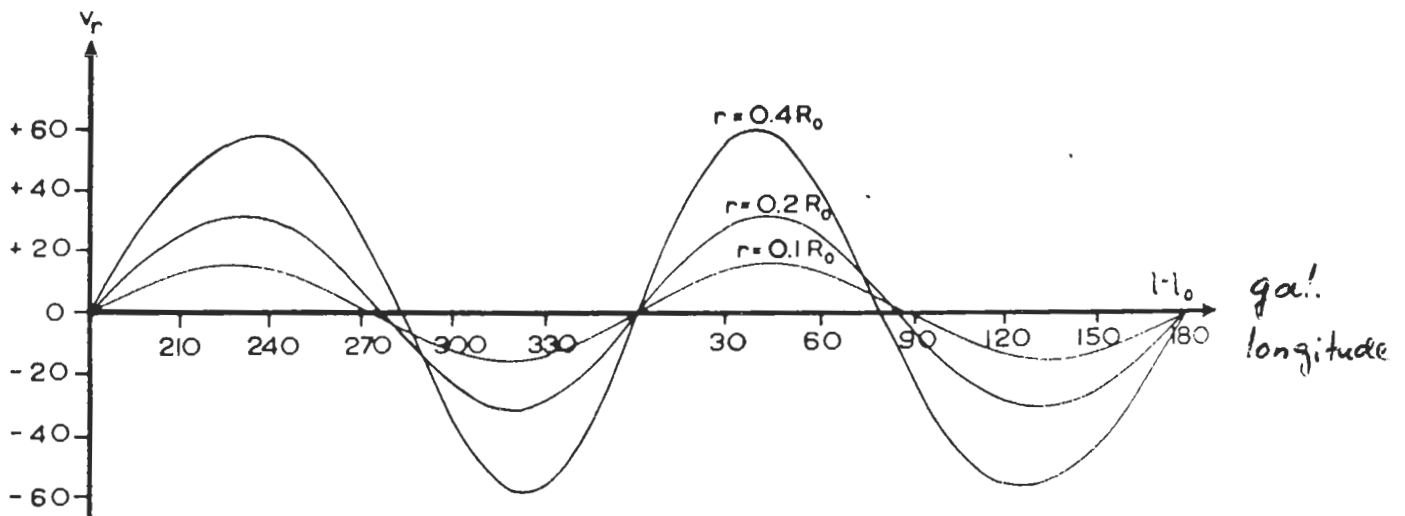
ominaisliike $\mu_l = t/(4,74 \cdot d) = (A/4,74)\cos 2l + B/4,74$

=> μ_l ei riipu etäisyydestä! (kun $d \ll R_0$)

Oortin vakioista saadaan:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_0/R_0 &= A-B \\ (d\Theta/dR)_{R_0} &= -(A+B) \end{aligned} \right\}$$

Havaittavat efektit säteisnopeuksissa:



-Säteisnopeus maksimi kun $l = 45^\circ, 225^\circ$, minimi kun $l = 135^\circ, 315^\circ$

-Säteisnopeus = 0 kun $l = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$

- v_R - käyrän amplitudi verrannollinen etäisyyteen d

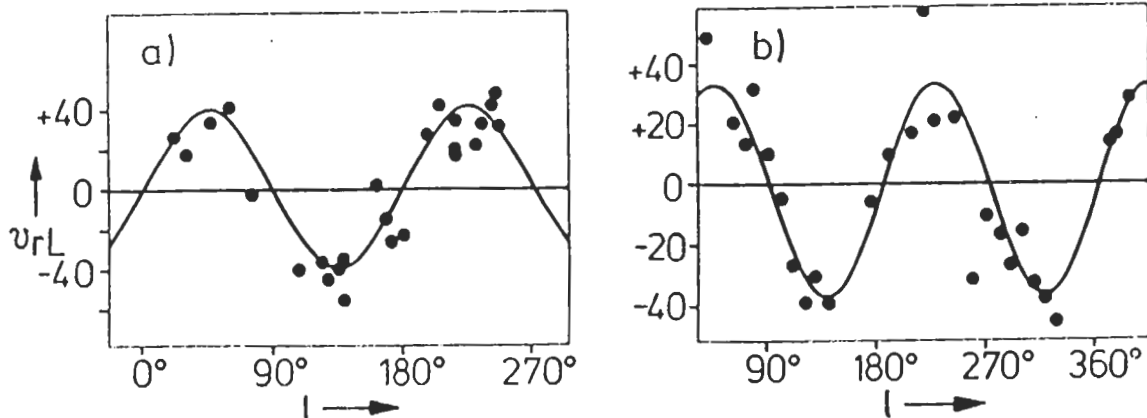
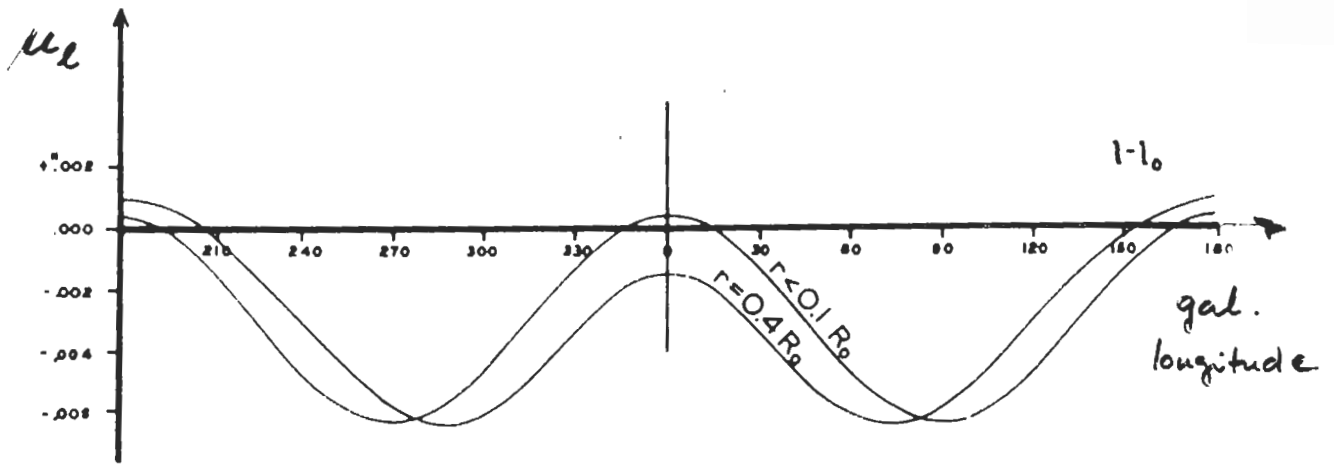


Fig. 3.45a,b. Radial velocity after discounting the solar motion v_{rL} [kms⁻¹] as a function of the galactic longitude: (a) for classical Cepheids with mean distance $\bar{r} = 2.3$ kpc (from Joy, 1939) and (b) for early type B-stars with $\bar{r} = 2.0$ kpc (from Feast and Thackeray, 1958)

Havaittavat efektit ominaisliikkeissä:



- μ_l positiivinen lähellä pisteitä $l = 0^\circ$ ja $l = 180^\circ$, muuten negatiivinen
- Suurimmat efektit suunnissa $l = 90^\circ, 270^\circ$ (μ_l minimi)
- μ_l :n kaksoissinikäyrä ei riipu etäisyydestä, kun d on pieni, $d < 0.1 R_0$

Oort vertasi em. v_R ja μ_l kaavojen ennustamia käyriä havaintoihin ja saattoi todeta, että ennustetut efektit ovat olemassa. Linnunradan differentiaalinen rotaatio tuli näin verifioiduksi ja samalla se, että Linnunradan keskus on Sagittariuksen suunnassa $l' = 327^\circ$ ($l'' = 0^\circ$)

6.4 Rotaatiokäyrien määrittäminen

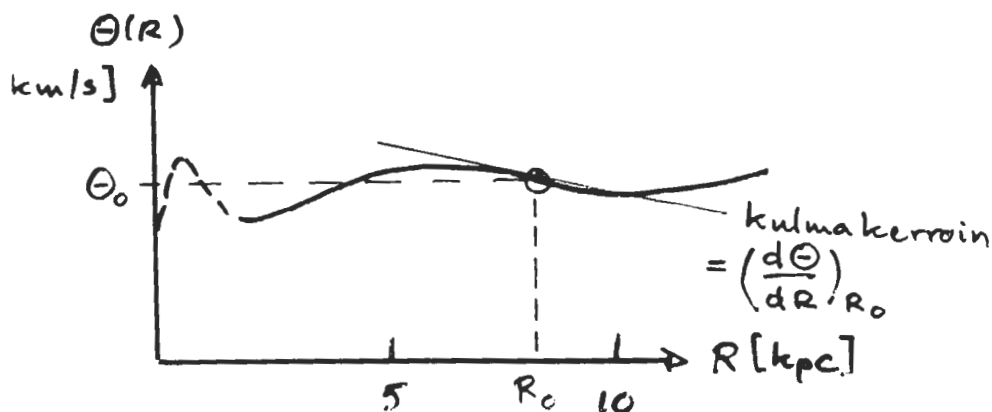
Määrättävä A, B, Θ_0, R_0

Nämä riippuvat toisistaan: $\Theta_0/R_0 = A - B$; $(d\Theta/dR)_{R_0} = -(A + B)$

a) Oortin vakio A:

- 1) Säteisnopeuksien vaihteluista $v_R = A \cdot d \sin 2l$
- 2) Ominaisliikkeiden vaihtelusta $\mu_l = (A \cos 2l + B)/4,74$
- 3) Linnunradan rotaatiokäyrästä $\Theta(R)$

käyttäen suoraan A:n määritelmää $A = (1/2)[\Theta_0/R_0 - (d\Theta/dR)_{R_0}]$



- Rotaatiokäyrän määrittäminen katso kohta 6.5
- R_0 tunnettava myös



111a

COMMUNICATION FROM THE OBSERVATORY AT LEIDEN.

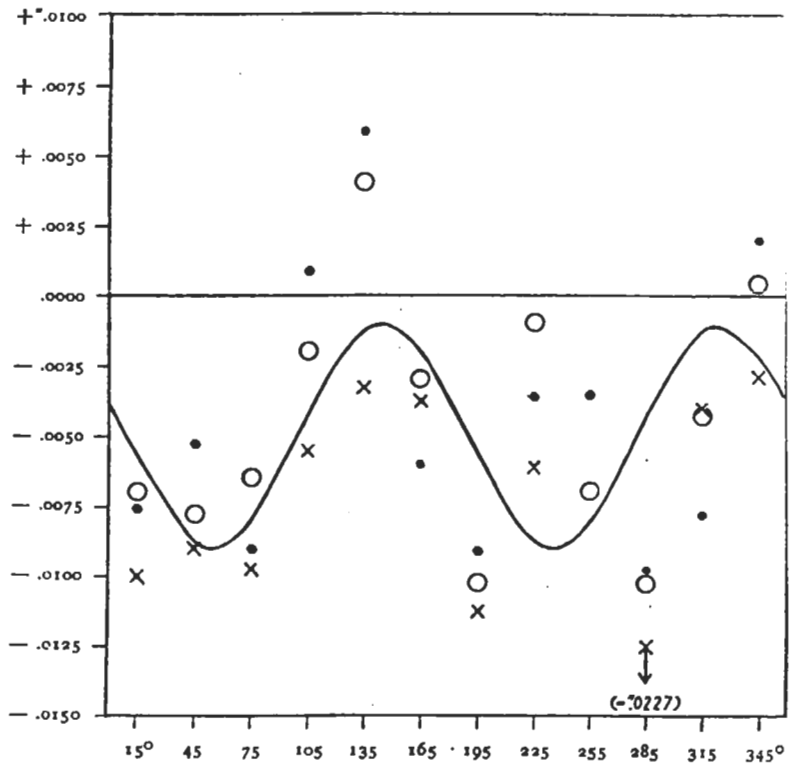
Investigations concerning the rotational motion of the galactic system, together with new determinations of secular parallaxes, precession and motion of the equinox, by *J. H. Oort*.

1. Introduction and summary.

It has been shown in *B. A. N.* 120 that the radial velocities of nearly all distant stars give evidence of a rotation of the entire galactic system around a remote axis in the direction of the centre of the globular cluster system. The principal aim of the present article is to give the definitive discussion of the rotation shown by *proper motions*, some preliminary results of which have appeared in *B. A. N.* 120. It is shown that the proper motions indicate a rotation in the same direction and of the same character as the radial velocities. From nearly 800 distant stars we find $B = -0.024 \text{ km/sec. parsec} \pm 0.005 \text{ (m. e.)}$ (for the meaning of *A* and *B* see section 2). Combining this with the new value of *A* found in the 2nd section (viz. $A = +0.019 \text{ km/sec. parsec} \pm 0.003 \text{ (m. e.)}$) preliminary results have been derived for the distance of the rotational axis and for the character of the gravitational force (see section 7).

In the course of the investigation it was necessary to compute new values of the secular parallaxes of the distant stars. These values, which are independent of the rotation and of any uncertainty in the precessional constant, are shown in table 3. Especially those of the O stars and Md variables deviate strongly from formerly adopted results. It was also necessary to derive from the proper motions in galactic latitude an absolute value of the precessional constant, and in this solution a correction to NEWCOMB's motion of the equinox was introduced as an additional unknown. It was found to be very probable that NEWCOMB's motion of the equinox requires a correction of $-0.014 \pm 0.002 \text{ (m. e.)}$ (see page 85). The corresponding correction to NEWCOMB's precessional constant is then $+0.011 \pm 0.002 \text{ (m. e.)}$. If NEWCOMB's motion of the equinox is assumed to be correct, the correction to his precessional constant is found to amount to $+0.0029 \pm 0.001 \text{ (m. e.)}$. Two graphs showing how the observed proper motions in galactic longitude and

FIGURE I.
Proper motions in galactic longitude.



circle towards the pole of the milky way and that towards the pole of the equator. (This angle has been tabulated by INNES in *Union Observatory Circular* No. 29, 1915). We have $\mu_{\alpha} = \mu_l \cos \eta - \mu_b \sin \eta$ and $\mu_{\delta} = \mu_l \sin \eta + \mu_b \cos \eta$.

Menetelmässä 1) on tärkeää, että etäisyydet d ovat mahdollisimman suuret. Siksi käytetty OB-tähtiä, kefeidejä ja avoimia tähtijoukkoja. Esimerkkinä Joy 1939, Ap.J. 89, 356 Tutkimus kefeidien radiaalinopeuksista. (ks. s. 110 kuva.)

Nykyisin hyväksytty A:n arvo: $A = 14.4 \pm 1.2 \text{ kms}^{-1}/\text{kpc}$

b) Oortin vakio B:

1) Ominaisliikkeistä $\mu_l = (A \cos 2l + B)/4.74$

Vakiotermi B. Vaikeutena tämän vakiotermin erottaminen prekession aiheuttamasta systemaattisesta efektistä μ_l :ssä (ts. fundamentaalisen koordinaattisysteemin vaikeudet)

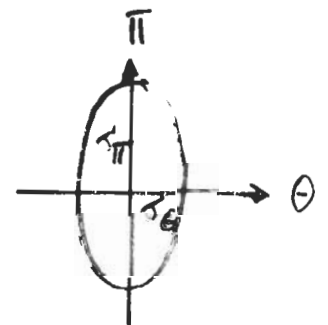
General Catalogue (Boss) $B = -13 \text{ kms}^{-1}/\text{kpc}$

FK3-N30: $B = -7 \text{ kms}^{-1}/\text{kpc}$

2) Epäsuorasti auringon lähiympäristön tähtien nopeusjakautuman (nopeusellipsoidi) avulla.

Nopeuksien hajonnat σ_Θ ja σ_π . Teoreettisesti voidaan osoittaa että:

$$\sigma_\Theta^2 / \sigma_\pi^2 = -B / (A - B)$$



| | $\sigma_\Theta^2 / \sigma_\pi^2$ | $-B/A$ | B(kun $A = 14.4 \text{ kms}^{-1}/\text{kpc}$) |
|----------|----------------------------------|--------|--|
| A0-M5(d) | 0.36 | 0.56 | -8.1 |
| F5-M5(d) | 0.40 | 0.67 | -9.6 |
| A-M(g) | 0.42 | 0.71 | -10.2 |

Nykyisin hyväksytty arvo: $B = -12.0 \pm 2.8 \text{ kms}^{-1}/\text{kpc}$

c) Linnunradan keskuksen etäisyys R_0 :

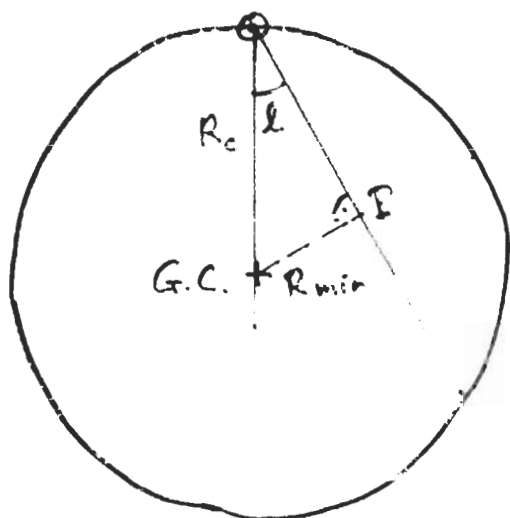
1) Pallomaisten joukkojen jakautumasta $R_0 = 6.8 - 9.5$ kpc

2) RR Lyrae tähtien jakautumasta lähellä Linnunradan keskuksen suuntaa olevassa "ekstinktioikkunassa" ($l = 1^\circ$, $b = -4^\circ$)

$$R_0 = 8.3 \pm 1.2 \text{ kpc}$$

+ 4 muuta aluetta 6.95 - 9.5 kpc \Rightarrow keskiarvo: $R_0 = 8.7$ kpc

3) AR_0 menetelmä



Tarkastellaan säteisnopeuksia pitkin näkö­sädettä suunnassa l ($b = 0^\circ$)

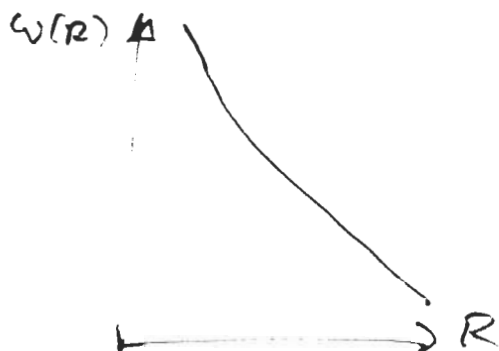
$$v_R = R_0(\omega - \omega_0)\sin l$$

$\omega(R)$ kasvaa monotonisesti kun

R pienenee \Rightarrow

$|v_R|$ maksimi saavutetaan

pisteessä $R_{\min} = R_0 \sin l$ (= piste E.)



$$|\sin l| = R_{\min}/R_0$$

Rajoitetaan tarkastelu alueeseen $R \approx R_0$,
Silloin voidaan käyttää approksimaatiota:

$$\omega - \omega_0 = (1/R_0) [(d\theta/dR)_{R_0} - \theta_0/R_0](R - R_0) = -2A(R - R_0)/R_0$$

ja saadaan:

$$v_R(\max) = -R_0 \cdot 2A \cdot \frac{R_{\min} - R_0}{R_0} \sin l$$

$$= -2AR_0 \sin l (1 - |\sin l|)$$

$$v_R(\max) = 2AR_0 \sin l (1 - |\sin l|)$$

Havaitaan $v_R(\max)$ suunnassa l (HI 21-cm havainnoista)

$\Rightarrow AR_0 = 124.5 \pm 17 \text{ kms}^{-1}$, A tunnetaan ($14.4 \text{ kms}^{-1}/\text{kpc}$) $\Rightarrow R_0 = 8.6 \pm 1.2 \text{ kpc}$

AR_0 kaavan johdossa oletettiin $R \approx R_0$. Maarten Schmidt (1956) on johtanut 2. asteen korjaustermin $\omega - \omega_0$ sarjakehitelmään, olettaen tietyn Linnunradan vetovoimakentän välillä R_0, R_{\min} .

Neutraalin vedyn 21 cm havaintojen perusteella voidaan olla suhteellisen varmoja että suunnissa $l = 54^\circ$ ja $l = 51^\circ$ sekä eteläisellä taivaalla suunnassa $l = 298^\circ$ esiintyy vetyä minimietäisyyttä vastaavassa kohdassa näkösaiteella. Havaitusta $v_R(\max)$ arvosta lasketut AR_0 arvot

$$AR_0 = (1/2) v_R(\max) [\sin(l - |\sin l|)]^{-1}$$

on esitetty seuraavassa taulukossa, jossa tulokset on esitetty käyttäen toisaalta Standard Solar motionin perusteella (sarake3) ja toisaalta Basic Solar motionin perusteella (sarake 4) määriteltyä LSR:ää nollapisteinä säteisnopeuksille $v_R(\max)$

| l | 2.asteen korjaus ΔAR_0 | AR_0 | |
|-------------|--------------------------------------|---|--|
| | | Standard Solar motion $u' = -10.5$ $v' = 15.4$ | Basic Solar motion $u' = -10$ $v' = 12$ |
| 54° | -12 | 151 | 142 |
| 51° | -14 | 143 | 135 |
| 298° | -6 | 146 | 132 |

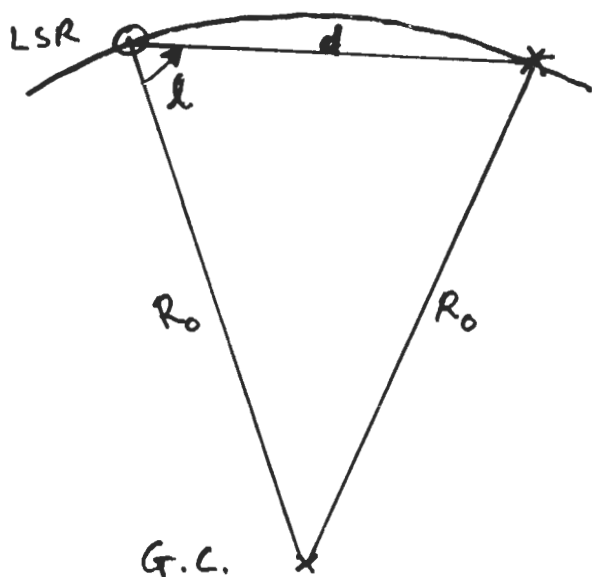
ΔAR_0 on em. 2. asteen korjaustermi. Riippuen LSR:n nollapisteestä saadaan siis AR_0 :lle vähän erilaisia arvoja:

$$AR_0 = 135 - 150 \text{ km/s}$$

Käyttäen edellä saatua arvoa $A = 14.4 \text{ km/s kpc}$ seuraa tästä $R_0 = 9.4 - 10.4 \text{ kpc}$, mikä sopii hyvin yhteen em. suorien menetelmien kanssa.

4) Epäsuora menetelmä, jossa mitataan etäisyys sellaisiin tähtiin, joiden radiaalinopeus = 0 (LSR:n suhteen)

Kaavan $v_R = R_o (\omega - \omega_o) \sin l = 0$ mukaan $\omega(R) = \omega_o(R_o)$ eli tähden on oltava samalla etäisyydellä Linnunradan keskuksesta kuin aurinko $R = R_o$. Jos tähden etäisyys auringosta (= d) tunnetaan, saadaan oheisen



kuvion mukaan : $d/2 = R_o \cos l$
 $R_o = d/2 \cos l$

Menetelmässä on oletettava että tähti liikkuu ympyräradalla. On siis tarkasteltava hyvin nuoria, populaatio I kohteita.

Feast ja Thackeray (1958) sovelsivat tätä menetelmää eteläisen taivaan B tähtiin. Tulos $R_o = 8.9$ kpc. Pohjoisella taivaalla tunnetaan vain kaksi sopivaa B-tähteä $+27^\circ 3513$ ja $+28^\circ 3487$. Niiden avulla ovat G. ja L. Münch saaneet $R_o = 10.7$ ja 8.8 kpc.

Tämä epäsuora menetelmä ei anna täysin yhtäpitäviä tuloksia, mutta ne eivät ole ristiriidassa arvon $R_o = 8.5$ kpc kanssa. Menetelmällä on se periaatteellinen etu, että siinä käytetään vain tähtiä jotka ovat samalla etäisyydellä linnunradan keskuksesta kuin aurinko. Näiden tähtien ominaisuuksien voidaan olettaa olevan samat kuin auringon lähiympäristössä (esim, absoluuttiset magnitudit => fotometrinen etäisyyden määrittäminen).

Käytettäessä Linnunradan keskuksen lähellä olevia kohteita (RR Lyrae tähdet) ei voida olla täysin varmoja että niiden ominaisuudet ovat samat kuin auringon lähellä tutkittujen samanlaisten kohteiden ominaisuudet.

5) H₂O Maser Sgr B2:sa => statistisen parallaksin menetelmä (1987-88) =>
 $R_o = 7.8 \text{ kpc} \pm 1.5 \text{ kpc}$.

Keskuksen etäisyydelle käytetään nykyisin arvoa

$$R_o = 8.5 \text{ kpc}$$

d) Rotaationopeus Θ_0 :

1. Paikallisen galaksiryhmän galaksien radiaalinopeuksista.

Auringon nopeus galaksien suhteen saadaan radiaalinopeuksista (vrt. auringon apeksin määräys). Tämä on korjattava auringon pekuliaariliikkeen takia LSR:n suhteen. Tulos $\Theta_0 = 290 \text{ kms}^{-1} \pm 30$ ($l = 106^\circ$; $b = -6^\circ$)

2. Pallomaisten joukkojen radiaalinopeuksista

Mayall (1946) $\Theta_0 \approx 200 \text{ kms}^{-1} \pm 25$ $l = 87^\circ$ $b = 0^\circ$

Kinman (1959) $\Theta_0 \approx 167 \text{ kms}^{-1} \pm 30$ $l = 90^\circ$ $b = 0^\circ$

Tämä antaa kuitenkin vain alarajan Θ_0 :lle koska myös pallomaisten joukkojen muodostama järjestelmä on rotaatiossa samaan suuntaan kuin LSR ja aurinko.

3. Tähtien "pakonopeuden" avulla

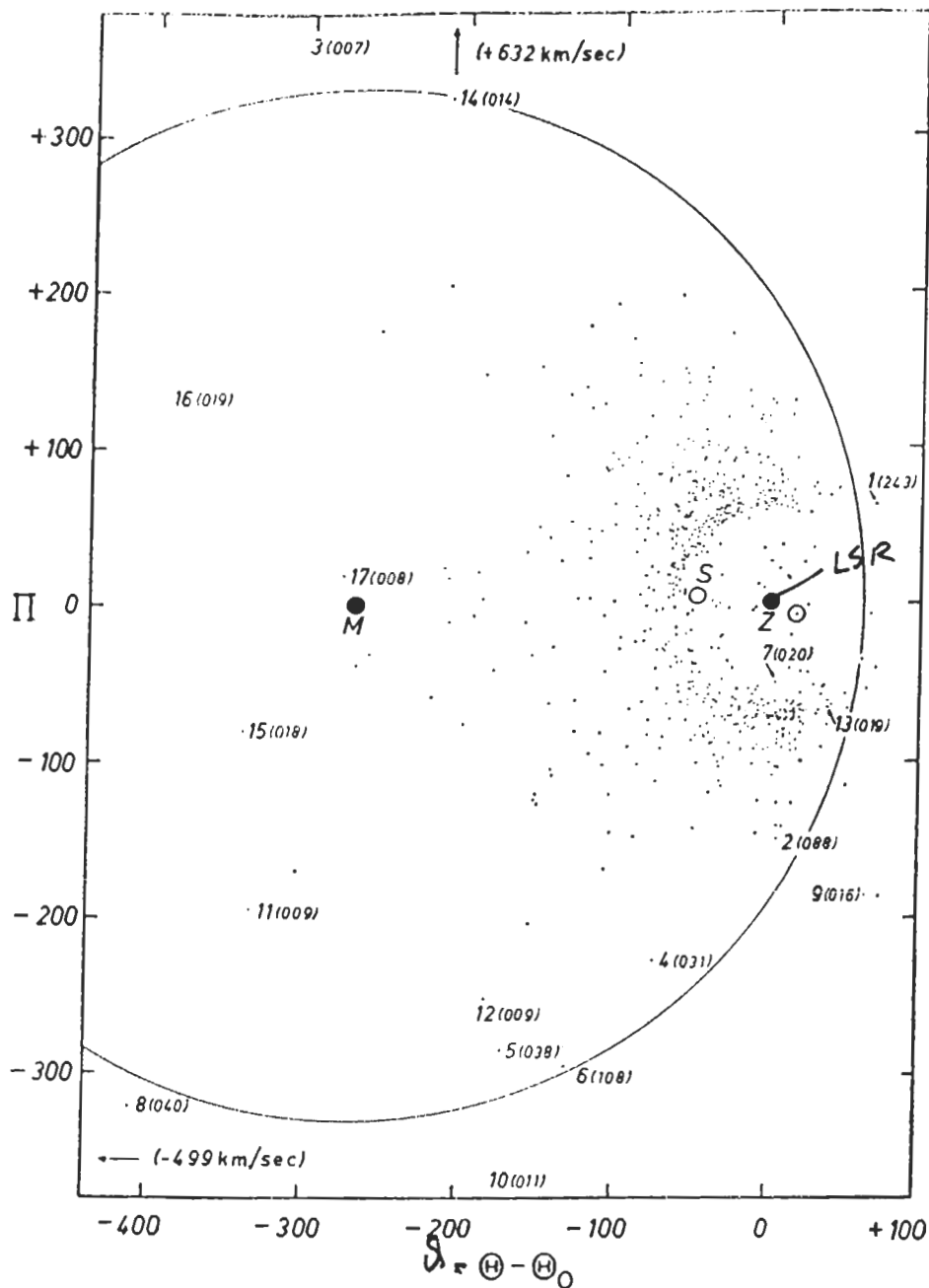
Tähtien nopeus FSR:ssä Π , Θ , Z

Tähti poistuu Linnunradasta, jos sen nopeus $v > \text{pakonopeus } v_{\text{esc}}$

$$v^2 = \Pi^2 + \Theta^2 + Z^2 > v_{\text{esc}}^2$$

Tähtien nopeudet saadaan havainnoista LSR:n suhteen: Π , $\Theta - \Theta_0 = \theta$, Z

$$\text{ts. } v^2 = \Pi^2 + (\Theta_0 + \theta)^2 + Z^2$$



—Distribution of Π and $\Theta - \Theta_0$ for a larger material of high-velocity stars (Fricke 1949). The figure is analogous to Figure 8.

Kuvassa esitetty ns. "pikakiitäjästähtien" ("high velocity stars") avaruusnopeuksien projektiot Π , Θ tasossa (Avaruusnopeus LSR:n suhteen $\geq 65 \text{ kms}^{-1}$)

Todetaan, että suunnassa $l = 90^\circ$ ei esiinny tähtiä, joiden nopeus LSR:n suhteen $> 63 \text{ kms}^{-1}$. Identifioidaan tämä pakonopeudeksi $\theta_{\text{esc}} = (\Theta - \Theta_0)_{\text{esc}} = 63 \text{ kms}^{-1}$. Tällöin "pakonopeuspallon" yhtälöksi tulee

$$\Pi^2 + (\Theta_0 + \theta)^2 + Z^2 = (\Theta_0 + 63)^2$$

Äärimmäisiä nopeuksia kussakin suunnassa käyttäen määrätään nyt Θ_0 siten että pallon pinta kulkee näiden äärimmäisten pisteiden kautta.

Sivun 117 kuvassa M on näin saadun pallon keskipiste. W. Fricke (Astron. Nachrichten 278, 49, 1949) sai tätä menetelmää käyttäen

$$\Theta_0 = 276 \pm 21 \text{ kms}^{-1}$$

Pakonopeudeksi tulee siis

$$v_{\text{esc}} = 276 + 63 = 339 \text{ kms}^{-1}$$

Pakonopeus tietyssä Linnunradan pisteessä määräytyy Linnunradan vetovoimakentän potentiaalin $\Omega(x, y, z)$ perusteella. Tähtien energia E

$$E = \underbrace{(1/2)m(\Pi^2 + \Theta^2 + Z^2)}_{\text{liike-energia}} - \underbrace{m \cdot \Omega(x, y, z)}_{\text{potentiaalienergia}}$$

Tähti poistuu Linnunradasta, jos $E \geq 0$, ts.

$$\Pi^2 + \Theta^2 + Z^2 \geq 2\Omega(x, y, z) = v_{\text{esc}}^2$$

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{2\Omega}$$

Jos $E = 0$, on tähden radan kaukaisin piste (= apogalaktikum) etäisyydellä $R = \infty$. Koska Linnunrata on kooltaan äärellinen ($R \leq 30 \text{ kpc}$) ei tällaisia tähtiä esiinny, vaan kaikilla tähdillä on $E < 0$. Tällöin siis tähden nopeus auringon lähellä on aina $v < v_{\text{esc}}$, eivätkä suurimmatkaan havaitut nopeudet anna pakonopeutta.

Tämä ei kuitenkaan haittaa edellä selostettua Θ_0 :n määrittämisestä, jossa riittää se että nopeusjakautuman rajaviiva Linnunradan tasossa on ympyrä (olipa sen säde mikä tahansa).

4. Oortin vakioiden A ja B avulla

$$\Theta_0/R_0 = A - B = 26.4 \text{ kms}^{-1}/\text{kpc}$$

$$A = + 14.4 \text{ kms}^{-1}/\text{kpc} ; B = - 12 \text{ kms}^{-1}/\text{kpc} , R_0 = 8.5 \text{ kpc}$$

$$\Rightarrow \Theta_0 = 224 \text{ kms}^{-1}$$

IAU:n komission 33 suosittelema arvo $\Theta_0 = 220 \pm 20 \text{ kms}^{-1}$ (1985)

6.5. Linnunradan rotaatiokäyrä

Vakiot A, B ja Θ_0 kuvaavat Linnunradan rotaatiota vain auringon lähiympäristössä.

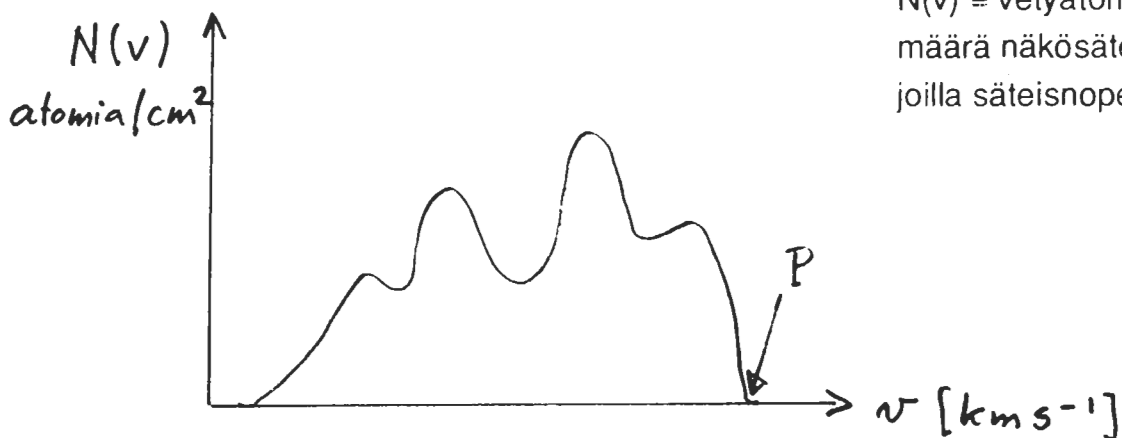
Yleisemmin Linnunradan rotaatiokäyrä $\Theta(R)$ tai $\omega(R)$.

a) Linnunradan sisäosissa:

vedyn 21-cm (tai CO:n 2.6 mm) säteilyn avulla

$$R < R_0 = 8.5 \text{ kpc}$$

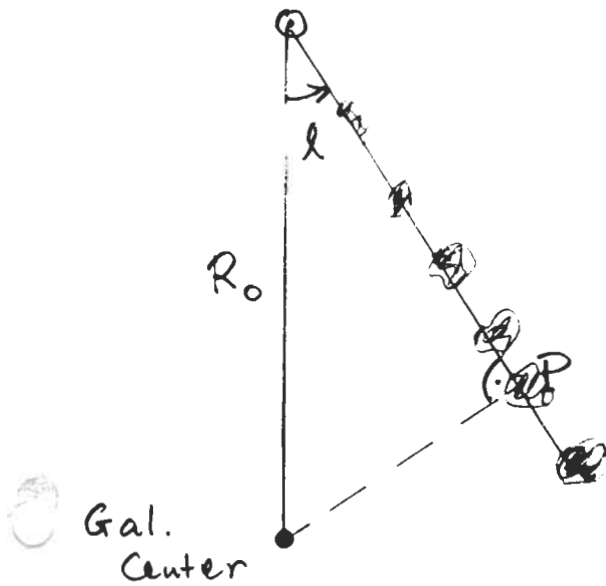
Havaitaan kussakin suunnassa tietty viivaprofiili:



Tämä viivaprofiili on yhdistelmä eri etäisyyksillä Linnunradassa olevien vetypilvien säteilystä. Johtuen Linnunradan rotaatiosta eri etäisyyksiin liittyy erilaiset säteisnopeudet:

$$v_R = R_o[\omega(R) - \omega_o(R)]\sin l$$

vaikeutena on etäisyyden R määrittäminen.



Vaikeuksia:

- ei-ympyränmuotoiset liikkeet
- vedyn epähomogeeninen jakautuma:
pisteessä P ei aina olekaan vetypilveä

Voidaan olettaa, että $\omega(R)$ kasvaa monotoonisesti kun R pienenee. Tällöin säteisnopeuden maksimi-arvo $|v_R|_{\max}$ saavutetaan pisteessä P (ks. kuva), jolle $R = R_{\min} = R_o \sin l$ (Pisteestä P tuleva viiva-profiilin kohta merkitty edellisen sivun kuvaan)

b) Linnunradan ulko-osissa: optisista havainnoista

$$R > R_o = 8.5 \text{ kpc}$$

Parhaat tulokset tässä alueessa saatu kefeidien ja HII alueiden avulla.

Havaitaan v_R , visuaalinen magnitudi V ja periodi $P \Rightarrow M_V \Rightarrow$ etäisyys d .

Tuloksia saatu etäisyydelle $R = 13 \text{ kpc}$ asti.

Alueessa $3 \leq R \leq 13 \text{ kpc}$
 $\Theta(R)$ muuttuu varsin vähän!

Fich et al.
ApJ 342, 272

ROTATION CURVE OF MILKY WAY TO $2R_0$

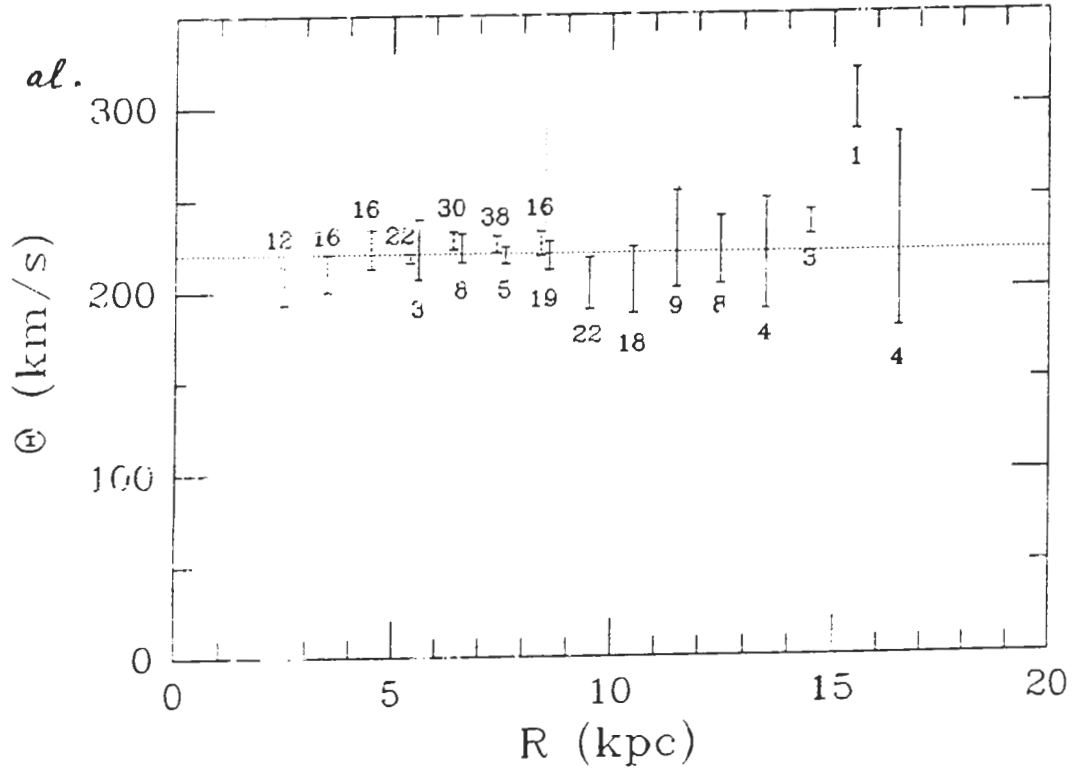


FIG. 3.—The H I and CO data binned in 1 kpc intervals in R . The values plotted are the mean Θ weighted by the uncertainties in the values of Θ for individual objects. The error bars give the weighted uncertainty in the mean for each bin.

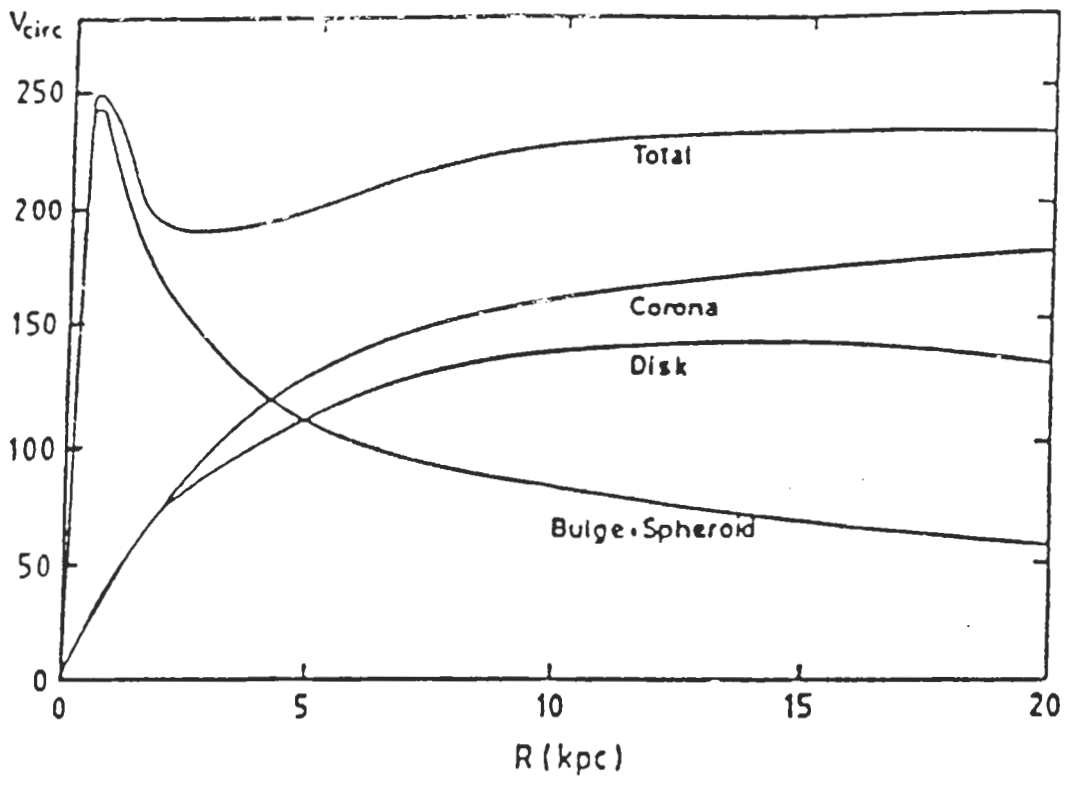


FIGURE 10.16
Mass model of the Galaxy represented by the rotation curves corresponding to the gravitational fields of the individual components indicated. This is an adaption of the model given by Schmidt (1985), allowing for a disk scale length of 5 kpc. The Sun is at 8.5 kpc from the center. Further parameters of the model are in the text. (From van der Kruit 1986.)

Jos Linnunradan massa on säteen $R = R_0$ sisäpuolella =>
 alueessa $R > R_0$ rotaationopeus lähestyy Kepler-liikkeen muotoa

$$\Theta(R) = \sqrt{[(GM)/R]} \quad \Theta^2/R = (GM)/R^2$$

Linnunradan tapauksessa havaittu $\Theta(R)$ kun $8.5 < R < 16$ kpc,
 ei selvästikkään ole tätä muotoa!

Vaan $\Theta(R) =$ vakio tai vähän nouseva

Myös muissa Linnunradan kaltaisissa spiraaligalakseissa havaitaan
 vastaava, laakea rotaatiokäyrä.

Laakea rotaatiokäyrä:

$$\Theta^2 = (G \cdot M(R))/R = \text{vakio}$$

$$\Rightarrow M(R) \propto R \quad \Rightarrow \frac{dM(R)}{dR} = \text{const}$$

$$M(R) = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

$$\frac{dM(R)}{dR} = 4\pi R^2 \rho(R) = \text{const}$$

$$\Rightarrow \rho(R) \propto 1/R^2 \quad \text{isoterminen pallo}$$

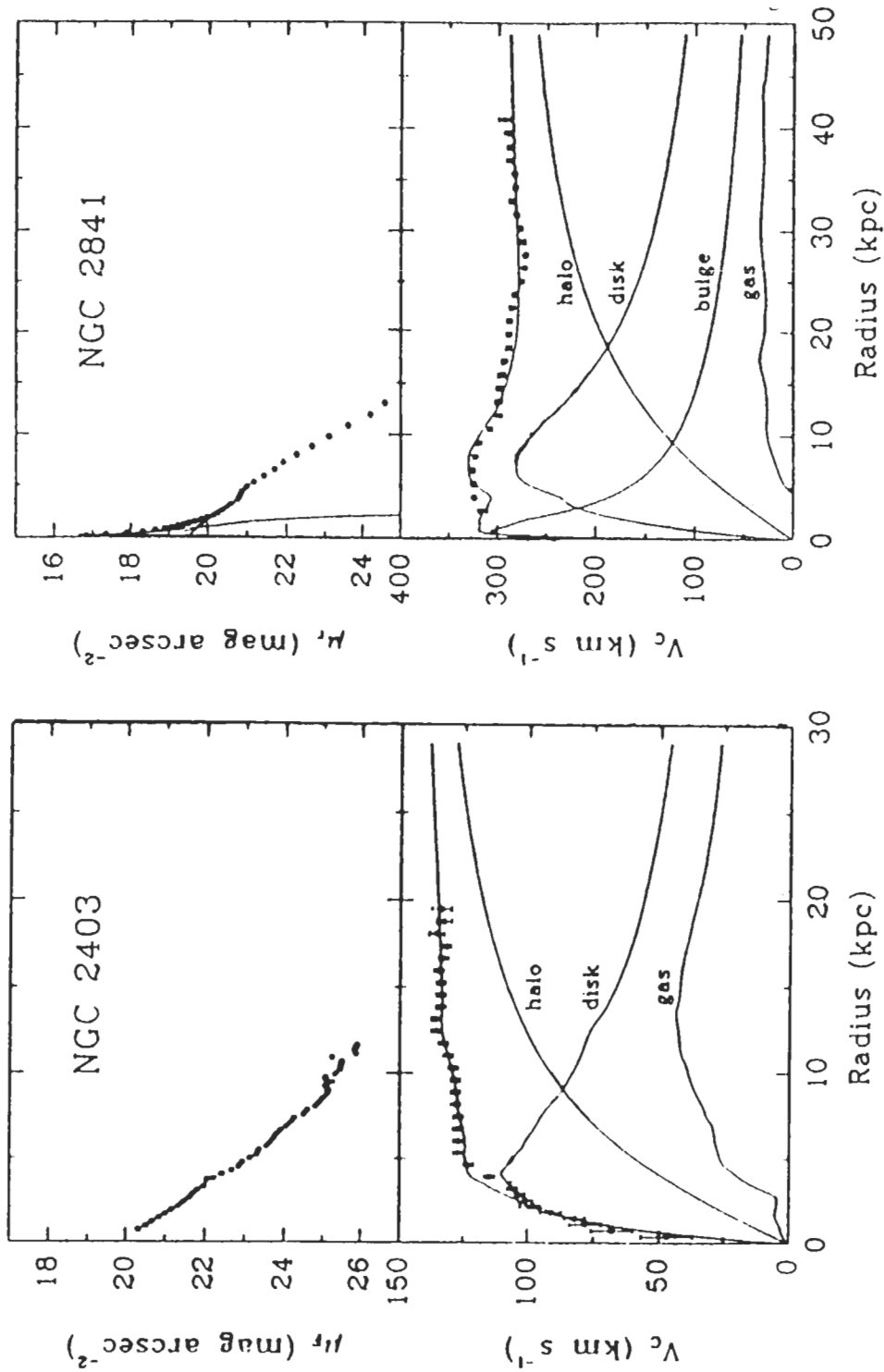
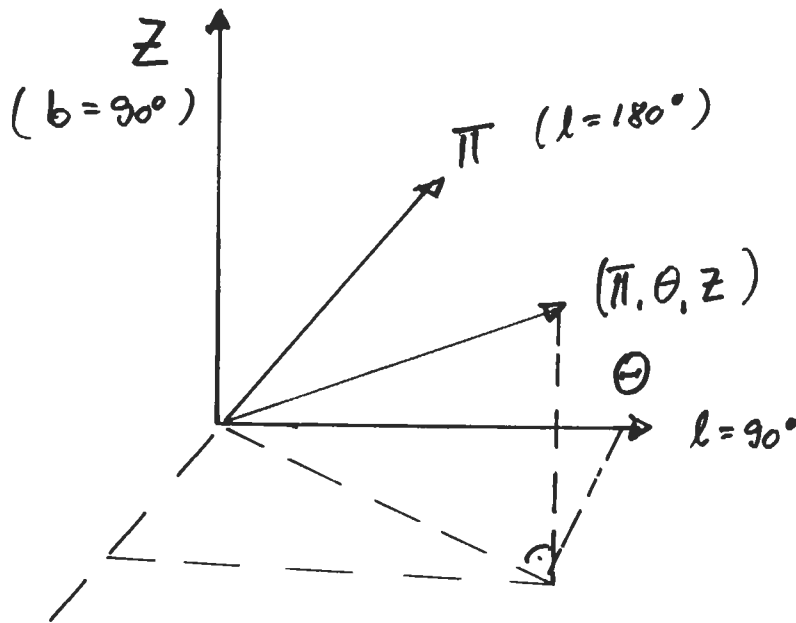


FIGURE 10.13

Analysis of the rotation curve and mass model for NGC 2403 and 2841. The upper panels show the photometry from Kent (1987) and a decomposition in truncated bulge and disk. The lower panels show the observed rotation curve (points and error bars), the circular-velocity curves for the four components, and the total model rotation curves for the best-fitting models. (From Begeman 1987.)

7. Tähtien radoista Linnunradassa

7.1 Bottlingerin diagramma



Fundamental Standard of Rest.

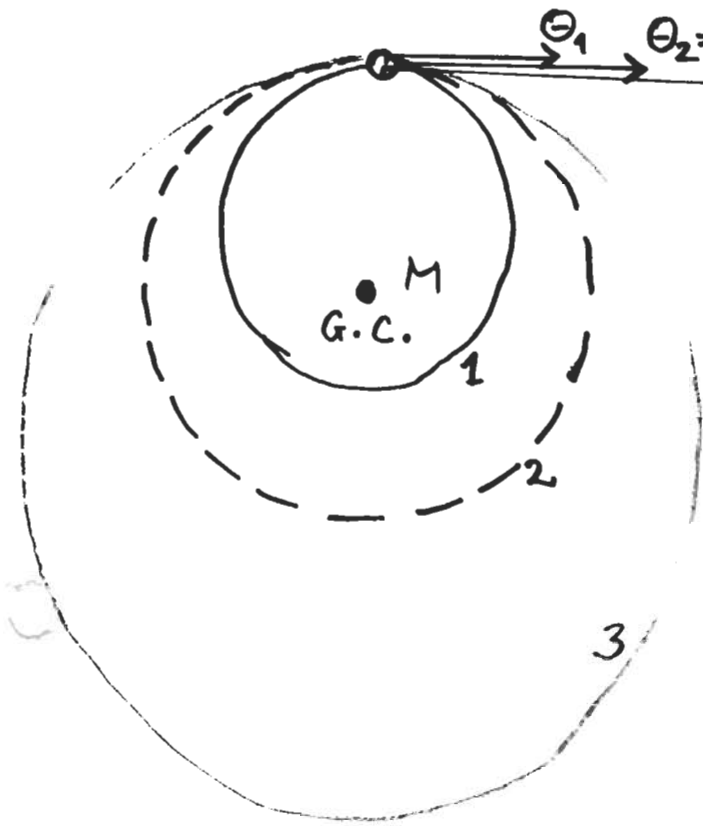
Kutakin nopeusvektoria Π , Θ , Z vastaa tietty tähden rata Linnunradan vetovoimakentässä.

- Koska 1) Linnunradan vetovoimakenttä $F(R) \neq -GM/R^2$
 \Rightarrow tähden rata ei ole sulkeutuva (ellipsi)
 2) $F(R)$ vain likimain tunnettu (empiirisesti)
 \Rightarrow rataa ei voida laskea kovin tarkasti.

Ratojen havainnollistamiseksi voidaan kuitenkin tarkastella tapausta, että Linnunradassa olisi $F(R) = -GM/R^2$. Tällöin saadaan ellipsiratoja.

Tarkastellaan 2-dimensionaalista tapausta ($Z = 0$). Nopeuden (Π , Θ) ja ellipsiradan alkioden (a , e) välinen yhteys
 \Rightarrow Bottlingerin diagramma.

a) Radan isoakseli = 2a



Kuva: erilaisia ratoja, joille $\Pi = 0$.

Energiaintegraali:

$$(1/2)v^2 - M/R = \text{vakio} = -M/(2a) \quad \leftarrow$$

$$v^2 = M(2/R - 1/a)$$

Ympyrärata $v = \Theta_0, R = R_0$

$$\Theta_0^2 = M \cdot 1/R_0 \Rightarrow M = R_0 \Theta_0^2$$

$$\triangleright \Pi^2 + \Theta^2 = v^2 = R_0 \Theta_0^2 (2/R - 1/a)$$

Auringon lähiympäristön tähdille on $R = R_0$

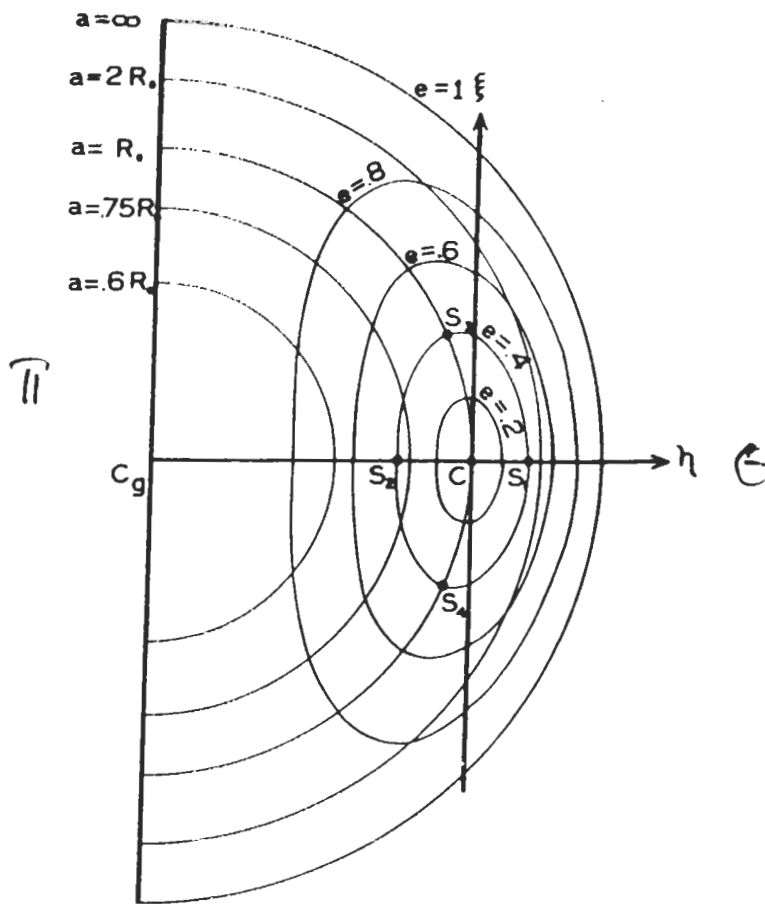
$$v = \Theta_0 \sqrt{(2 - R_0/a)} \quad (123 - \star)$$

Nämä ovat ympyröitä, joiden keskipiste on origo $\Pi = 0, \Theta = 0$

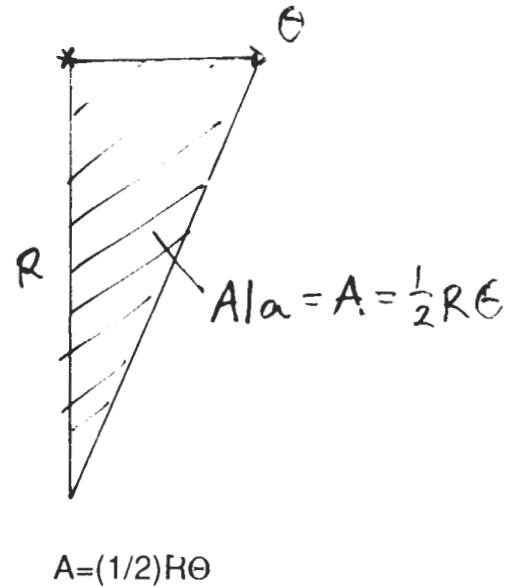
Siis:

Kutakin isoakselin arvoa a vastaa tietty ympyrä

| a | v | |
|----------|---------------------------|---|
| ∞ | $\Theta_0 \cdot \sqrt{2}$ | Parabelirata |
| R_0 | Θ_0 | Ympyrärata |
| $R_0/2$ | 0 | Pisteiden $R = 0$ ja $R = R_0$ välillä tapahtuva värähtely pitkin suoraa. |



Bottlinger diagram for inverse square force law.



b) Radan eksentrisyys = e

Pintalause $(1/2)R \cdot \Theta = \text{vakio} = \pi ab/P = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}/P$

(Ellipsin pinta-ala $\pi ab = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$)

Tähden kiertoaika = P

Kiertoaika ympyräradalla $P_0 = 2\pi R_0/\Theta_0$

Keplerin 3. laki $(P/P_0)^2 = (a/R_0)^3$

$$P = \underbrace{(2\pi R_0/\Theta_0)}_{P_0} (a/R_0)^{3/2} = (2\pi/\Theta_0) a^{3/2}/R_0^{1/2}$$

$$\text{Siis: } (1/2)R_0\Theta = \pi a^2 \sqrt{1-e^2} \cdot (\Theta_0/2\pi)(R_0^{1/2}/a^{3/2})$$

$$= (1/2)a^{1/2} \sqrt{1-e^2} R_0^{1/2} \Theta_0$$

$$\Theta = \Theta_0 \sqrt{[a(1-e^2)/R_0]} \Rightarrow \Theta^2 = \Theta_0^2 \frac{a}{R_0} (1-e^2)$$

(124*)

Tähden nopeus = v

$$\text{Silloin } \Pi = \sqrt{(v^2 - \Theta^2)} = \Theta_0 \sqrt{(2 - R_0/a - a(1 - e^2)/R_0)} \quad (\text{ks. kaavat 123 * ja 124 *})$$

Π :n ja Θ :n lausekkeissa esiintyy a ja e . Eliminoidaan a , koska nyt halutaan tutkia e :n vaikutusta:

$$\Pi^2/\Theta_0^2 = 2 - \underbrace{R_0/a} - \underbrace{a(1 - e^2)/R_0}$$

$$(124 *) \Rightarrow \frac{\Theta^2}{\Theta_0^2} (1 - e^2) \quad \frac{\Theta^2}{\Theta_0^2}$$

$$\boxed{\frac{\Pi^2}{\Theta_0^2} + \frac{\Theta^2}{\Theta_0^2} + \frac{\Theta_0^2}{\Theta^2} (1 - e^2) - 2 = 0} \quad (**)$$

Nämä käyrät on piirretty edellisellä sivulla olevan Bottlingerin diagrammaan kun $e = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$. Kun $e = 1.0$ yhtyy käyrä rajanopeusympyrään $a = \infty$

$$\Pi^2/\Theta_0^2 + \Theta^2/\Theta_0^2 = (\sqrt{2})^2$$

kun $e \ll 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi \ll \Theta_0 \text{ (pienet poikkeamat)} \\ \vartheta = \Theta - \Theta_0 \ll \Theta_0 \text{ (ympyräliikkeestä)} \end{array} \right.$$

$$\Theta/\Theta_0 = 1 + \vartheta/\Theta_0 \quad (\Theta/\Theta_0)^2 = 1 + 2\vartheta/\Theta_0 + \vartheta^2/\Theta_0^2$$

$$(\Theta_0/\Theta)^2 = [\Theta_0/(\Theta_0 + \vartheta)]^2 = 1 - 2\vartheta/\Theta_0 + 3\vartheta^2/\Theta_0^2 + \dots$$

$$(\Theta_0/\Theta)^2 (1 - e^2) = 1 - 2\vartheta/\Theta_0 + 3\vartheta^2/\Theta_0^2 - e^2 + \dots$$

$$** \Rightarrow \Pi^2/\Theta_0^2 + 1 + 2\vartheta/\Theta_0 + \vartheta^2/\Theta_0^2 + 1 - 2\vartheta/\Theta_0 + 3\vartheta^2/\Theta_0^2 - e^2 = 2$$

$$\boxed{\left(\frac{\Pi}{\Theta_0 e}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta}{\frac{\Theta_0 e}{2}}\right)^2 = 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Pi^2}{\Theta_0^2} + \frac{\vartheta^2}{(\frac{\Theta_0}{2})^2} = e^2$$

Siis ellipsejä, joiden akselit ovat verrannolliset e :hen ja akselien suhde = 2.

c) Tähdien paikka Bottlengerin diagrammassa

1. Piste C lähiympäristö : ympyrärata

2. Piste Θ -akselilla :
{ - tähti apogalaktikumissa Θ_{ai}
- tähti perigalaktikumissa Θ_{pi}
- ympyrärata

3. "Ulospäin" liikkuvat tähdet $\Pi > 0$
"Sisäänpäin" liikkuvat tähdet $\Pi < 0$

4. $a < R_0$ } rajana ympyrä $\Pi^2 + \Theta^2 = \Theta_0^2$
 $a > R_0$ }

5. Jos tehdään se (uskottava) oletus että ratojen isoakselit a ovat tasaisesti jakautuneet R_0 :n lähellä: $R_0 - \Delta R \leq a \leq R_0 + \Delta R$, ja jos ratojen eksentrisyydet ovat jakautuneet normaalisti keskiarvon $e = 0$ suhteen

$$n(e) \propto e^{-e^2/2\sigma_e^2}$$

niin tähtien nopeusjakautumaksi tulee

$$N(\Pi, \Theta) \propto \exp(-e^2/2\sigma_e^2) = e^{-\left[\frac{\Pi^2}{\Theta_0^2} + \frac{(2\Theta)^2}{\Theta_0^2}\right]/2\sigma_e^2}$$

eli ellipsoidinen nopeusjakautuma, jossa akselien suhde $\sigma_\Pi/\sigma_\Theta = 2$, mikä poikkeaa havaitusta arvosta koska tässä käytettiin epärealistista $F(R) \propto -1/R^2$ voimalakia.

6. Jos ratojen kaltevuudet i ovat normaalisti jakautuneet

$$n(i) \propto e^{-i^2/2\sigma_i^2}$$

ovat myös tähtien nopeuskomponentit $Z = \Theta \cdot i$ normaalisti jakautuneet.

=> 3-akselinen nopeusellipsoidi.

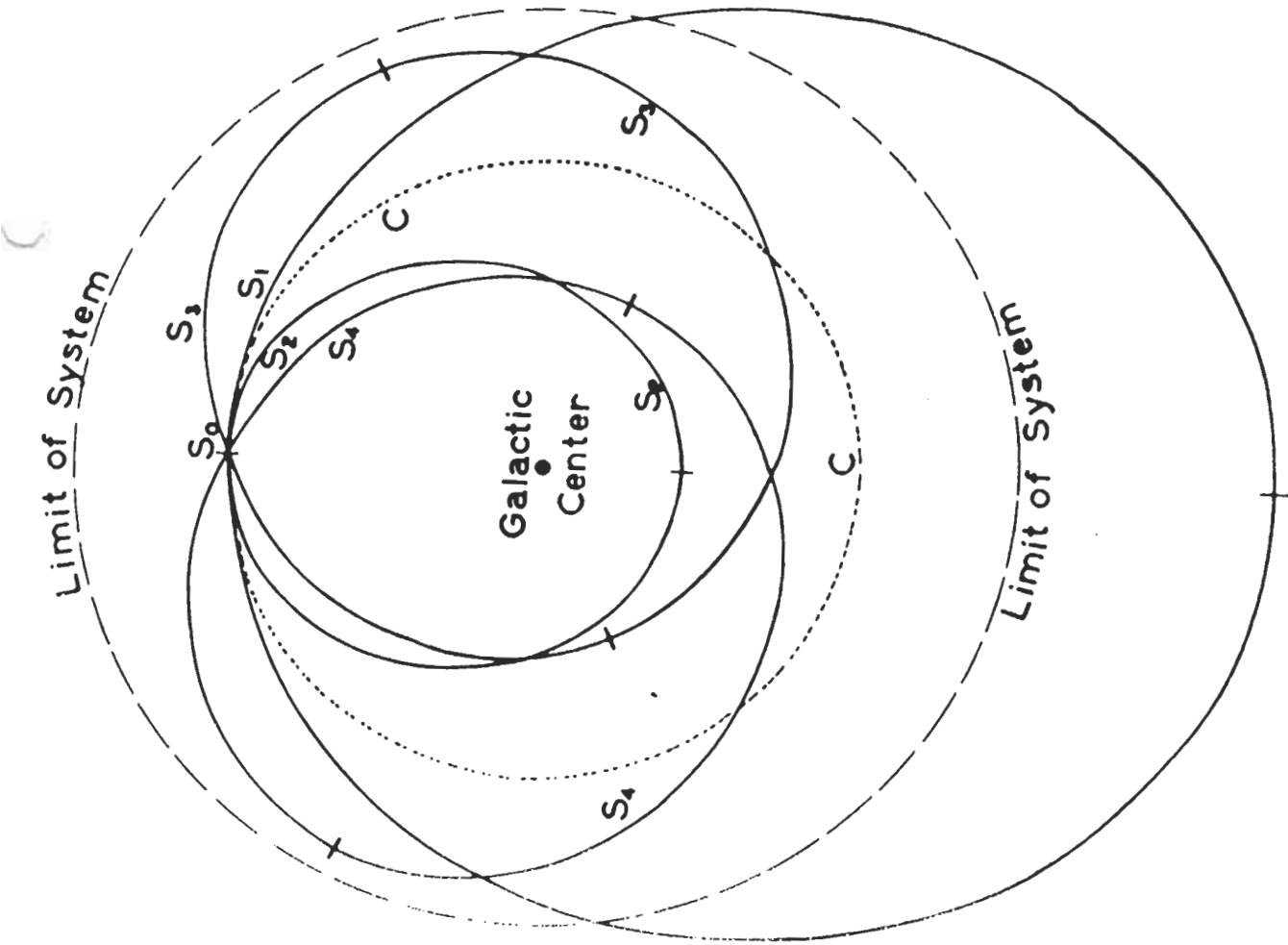
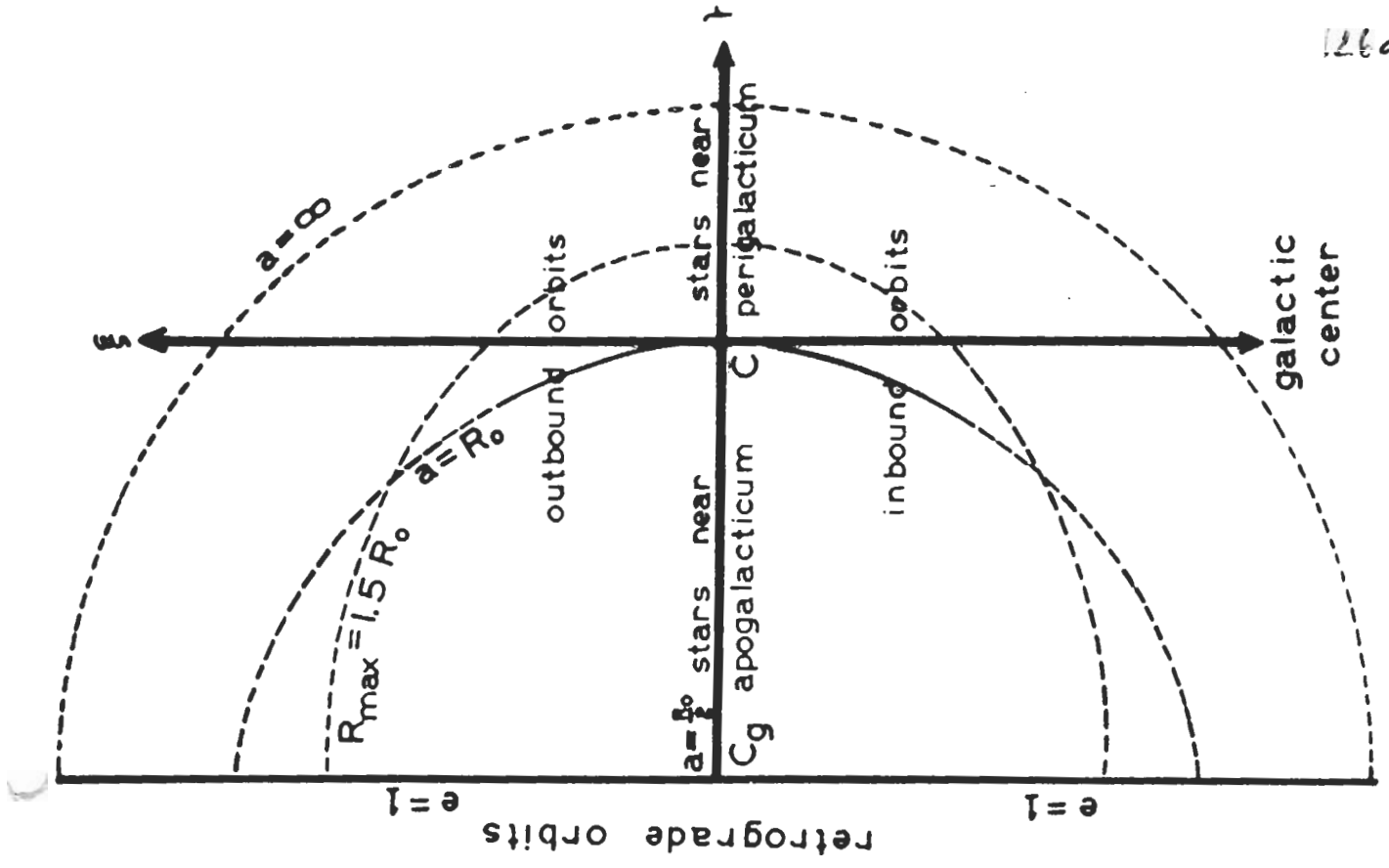
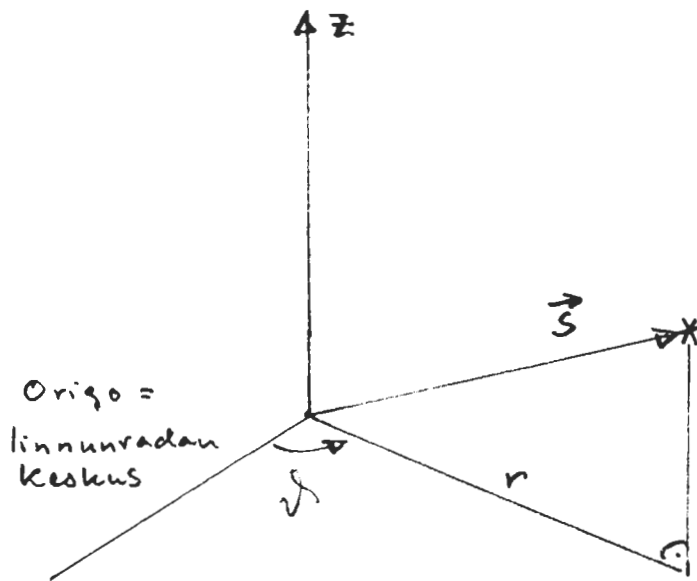


Figure 6.18 Relationship between galactic orbits and peculiar velocities

7.2 Pienet poikkeamat ympyräradasta

a) Tähtien likeyhtälöt sylinterikoordinaateissa

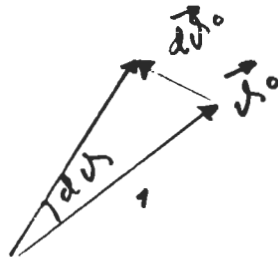
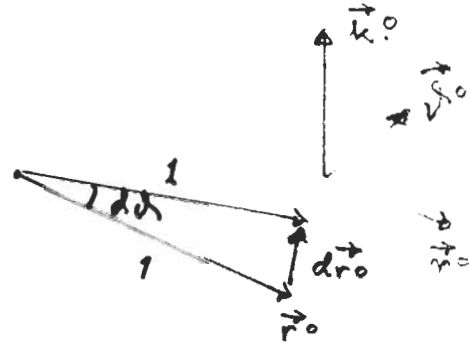


$$\boxed{\mathbf{s} = r \cdot \mathbf{r}^0 + z \cdot \mathbf{k}^0} \quad (1)$$

$\mathbf{r}^0, \mathbf{\hat{\theta}}^0, \mathbf{k}^0$ yksikkövektoreita

$$\boxed{dr^0/dt = \dot{\theta} \cdot \mathbf{\hat{\theta}}^0} \quad (2)$$

$$dr^0 = d\theta \cdot \mathbf{\hat{\theta}}^0$$



$$d\mathbf{\hat{\theta}}^0 = d\theta \cdot \overbrace{\mathbf{\hat{\theta}}^0}^{=1} \cdot (-\mathbf{r}^0)$$

$$\boxed{dk^0/dt = 0}$$

$$\boxed{d\mathbf{\hat{\theta}}^0/dt = -\dot{\theta} \cdot \mathbf{r}^0} \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{r} \mathbf{r}^0 + r \frac{dr^0}{dt} + \dot{z} \mathbf{k}^0$$

$$= \dot{r} \mathbf{r}^0 + r \dot{\theta} \mathbf{\hat{\theta}}^0 + \dot{z} \mathbf{k}^0$$

$$\ddot{\mathbf{s}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{r}^0 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \mathbf{\hat{\theta}}^0 + \ddot{z} \mathbf{k}^0$$

$$F_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{r} = F_r + \underbrace{(r\dot{\theta}^2)}_{\text{"keskipakovoima"}}$$

$$rF_\theta = r(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = d(r^2\dot{\theta})/dt = 0 \quad (\text{Oli, että Linnunradassa on keskeisvoima})$$

$$F_z = \ddot{z}$$

Tähtien likeyhtälöt:

1. Energiainegraali $E_1 = (1/2)(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \Omega = \text{vakio}$

2. Pintaintegraali $E_2 = r^2\dot{\theta} = \text{vakio}$

b) Radiaalinen komponentti

$$r = R_0 + \xi \quad ; \quad \xi \ll R_0$$

$$\ddot{r} = \ddot{\xi}$$

$$\dot{\vartheta} = \Theta/r$$

$$r\dot{\vartheta} = \Theta$$

$$r^2\dot{\vartheta} = r\Theta = \text{vakio}$$

$$\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 = F_r = -\Theta_{\text{circ}}^2(r)/r$$

$$\rightarrow \ddot{r} - \Theta^2/r = -\Theta_{\text{circ}}^2(r)/r$$

$$\Theta^2/r = \Theta^2 R_0^2 / r^3 = \Theta_0^2 R_0^2 / r^3 = \frac{\Theta_0^2 R_0^2}{R_0^3 (1 + \xi/R_0)^3} \approx \frac{\Theta_0^2}{R_0} \left(1 - 3 \frac{\xi}{R_0}\right) + \dots$$

$$Q_{\text{circ}}(r) = \underbrace{Q_{\text{circ}}(R_0)}_{\Theta_0} + \underbrace{\left(\frac{d\Theta_{\text{circ}}}{dr}\right)_{R_0}}_{-(A+B)} \cdot \underbrace{\xi}_{r - R_0} + \dots$$

$$= \Theta_0 - (A+B) \cdot \xi$$

$$Q_{\text{circ}}^2/r \approx (\Theta_0^2 - 2(A+B)\Theta_0\xi + \dots) / [R_0(1 + \xi/R_0)]$$

$$\approx \frac{\Theta_0^2}{R_0} - \frac{2\Theta_0}{R_0} (A+B) \xi - \frac{\Theta_0^2}{R_0^2} \xi + \dots$$

$$\ddot{\xi} - \Theta^2/r = -\Theta_{\text{circ}}^2/r$$

$$\ddot{\xi} - \frac{\Theta_0^2}{R_0} + 3\xi \frac{\Theta_0^2}{R_0^2} = -\frac{\Theta_0^2}{R_0} + \frac{2\Theta_0}{R_0} (A+B) \xi + \frac{\Theta_0^2}{R_0^2} \xi$$

$$\ddot{\xi} = \underbrace{2(\Theta_0/R_0)}_{2(A-B)} \underbrace{[(A+B) - \Theta_0/R_0]}_{A-B} \xi = 2(A-B)[A+B - A + B] \xi = 4B(A-B) \cdot \xi$$

$$\ddot{\xi} = 4B(A-B)\xi$$

Ratkaisu:

$$\xi = H \sin \kappa (t - t_0)$$

=>

$$\ddot{\xi} = -H\kappa^2 \sin \kappa (t - t_0)$$

$$-\kappa^2 = 4B(A-B)$$

Alkuehdot: t = 0

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = 0 \\ \dot{\xi} = \Pi_0 \end{array} \right.$$

$$\kappa = 2\sqrt{-B(A-B)} = 36 \text{ kms}^{-1}/\text{kpc}$$

$$\xi = \frac{\Pi_0}{\kappa} \sin \kappa t \quad \dot{\xi} = \Pi_0 \cos \kappa t$$

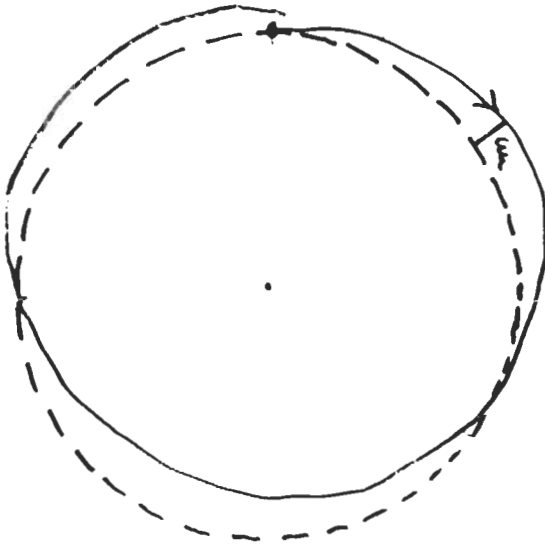
Siis: tähti värähtelee radiaalisessa suunnassa tasapainoasemansa $r = R_0$ molemmin puolin. Värähdysliikkeen periodi

$$P_{osc} = 2\pi\mu = 2\pi/2\sqrt{-B(A-B)} = 1.72 \cdot 10^8 \text{ a}$$

Vertailun vuoksi lasketaan kiertoaika:

$$P_{rot} = 2\pi R_0/\Theta_0 = 2\pi/(A-B) = 2.36 \cdot 10^8 \text{ a}$$

$$P_{osc}/P_{rot} = (1/2)\sqrt{(A-B)/-B} = (1/2)\sqrt{26/12} = 0.74$$



Tähden rata ei siis ole suljettu käyrä.

c) Tangentiaalinen komponentti

$$r^2\dot{\vartheta} = C = R_0\Theta_0 \quad (\text{Pintalause})$$

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= R_0\Theta_0/r^2 \approx \frac{R_0\Theta_0}{R_0^2} (1 - 2\xi/R_0 + \dots) \\ &= \frac{\Theta_0}{R_0} \left(1 - \frac{2}{R_0} \frac{\Pi_0}{\mu} \sin \mu t \right) \end{aligned}$$

$$\Theta = \dot{\vartheta}r = \dot{\vartheta}(R_0 + \xi) \approx R_0\dot{\vartheta} = \Theta_0 \left(1 - \frac{2}{R_0} \frac{\Pi_0}{\mu} \sin \mu t \right)$$

$$\Theta - \Theta_0 = -\Theta_0 \cdot \frac{2\Pi_0}{\mu R_0} \sin \mu t = \dot{\eta}$$

$$\boxed{\eta = \frac{2\Pi_0}{\mu^2 R_0} \Theta_0 \cos \mu t}$$

$$\mu^2 = -4B(A-B)$$

$$\Theta_0/R_0 = A-B$$

$$\frac{2}{\mu^2} \frac{\Theta_0}{R_0} = \frac{2(A-B)}{-4B(A-B)} = -\frac{1}{2B}$$

$$\eta = \frac{\pi_0}{-2B} \cos \kappa t$$

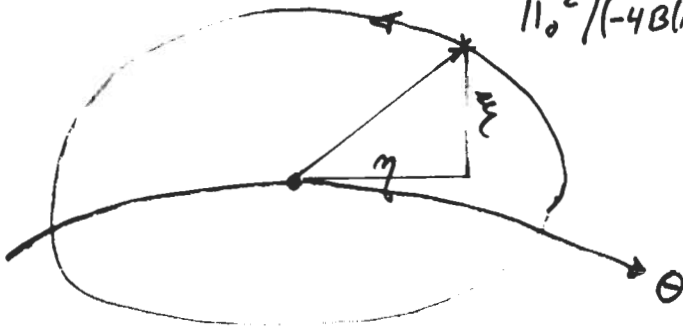
130

$$\dot{\eta} = \dot{\Theta} - \dot{\Theta}_0 = -\sqrt{(A-B)/-B} \pi_0 \sin \kappa t$$

Siis: Θ - suunnassa tapahtuvan värähtelyn periodi on sama kuin r -suunnassa.

Tähti kulkee pitkin episykliä:

$$\frac{\xi^2}{\pi_0^2 / (-4B(A-B))} + \frac{\eta^2}{\pi_0^2 / 4B^2} = 1$$

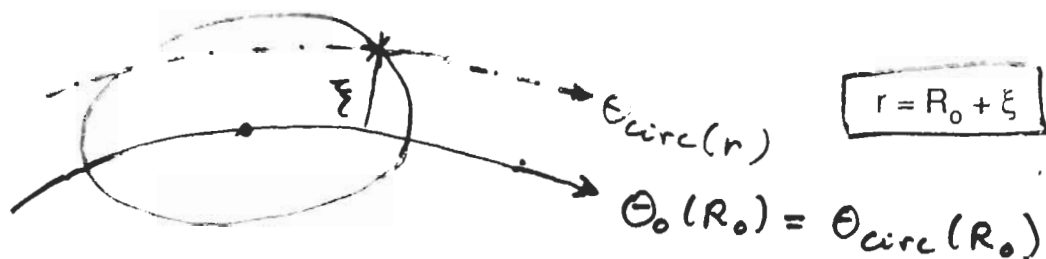


$$\frac{\text{Tangenciaalinen amplitudi}}{\text{Radiaalinen amplitudi}} = \frac{\pi_0}{-2B} \frac{2\sqrt{-B(A-B)}}{\pi_0} = \sqrt{\frac{A-B}{-B}} = 1.47$$

Edellä tarkasteltu poikkeamia ξ ja η kunkin tähden oman episyklin keskipisteen suhteen. Siis $\Theta_0(R_0)$ edusti tämän keskipisteen nopeutta ympyräradassaan, jossa kullakin tähdellä on eri R_0 . Kuitenkin tähtien nopeudet havaitaan LSR:n suhteen. LSR liikkuu ympyräradassa nopeudella $Q_{\text{circ}} = 220 \text{ kms}^{-1}$, joka on kaikille tähdille sama.



Auringon lähiympäristössä havaitut tähdet: kukin eri vaiheessa episykliliikettään.



$$\begin{aligned} \theta(r) - \theta_{\text{circ}}(r) &= \theta_0 R_0 / r - \theta_{\text{circ}}(r) \\ &\approx (\theta_0 R_0 / R_0)(1 - \xi / R_0) - \theta_0 - (d\theta_{\text{circ}}/dr)_{R_0} \cdot \xi \\ &= [-\theta_0 / R_0 - (d\theta_{\text{circ}}/dr)_{R_0}] \cdot \xi = 2B\xi = \frac{2B\Pi_0}{\mu} \sin \mu t \end{aligned}$$

$$\theta(r) - \theta_{\text{circ}}(r) = -\sqrt{\frac{-B}{A-B}} \Pi_0 \sin \mu t$$

$$\Pi = \Pi_0 \cos \mu t$$

Nopeuskoordinaatistossa (Π, θ -taso)

kutakin tähteä edustava piste sijoittuu ellipsille jonka koko riippuu tähden alkunopeudesta Π_0

$$\frac{\Pi^2}{\Pi_0^2} + \frac{[\theta(r) - \theta_{\text{circ}}(r)]^2}{-\frac{B}{A-B} \Pi_0^2} = 1$$

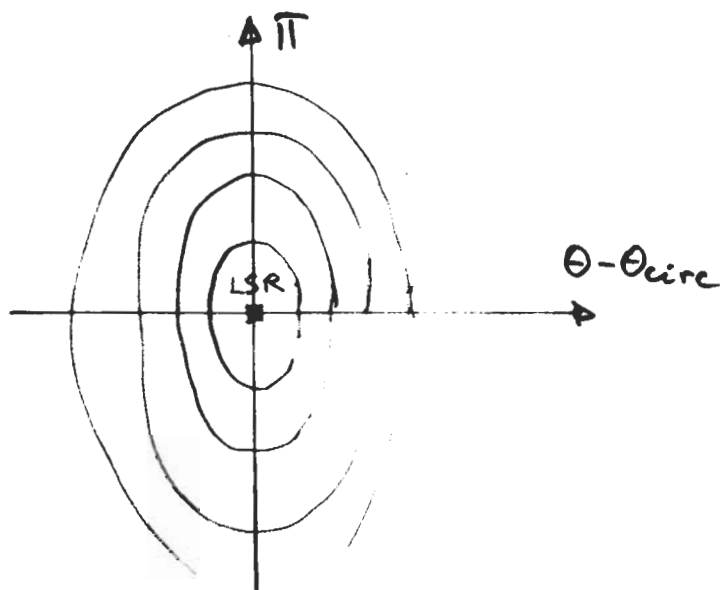
Tähden paikka ellipsillä riippuu siitä missä vaiheessa tähti on episykliradassaan.

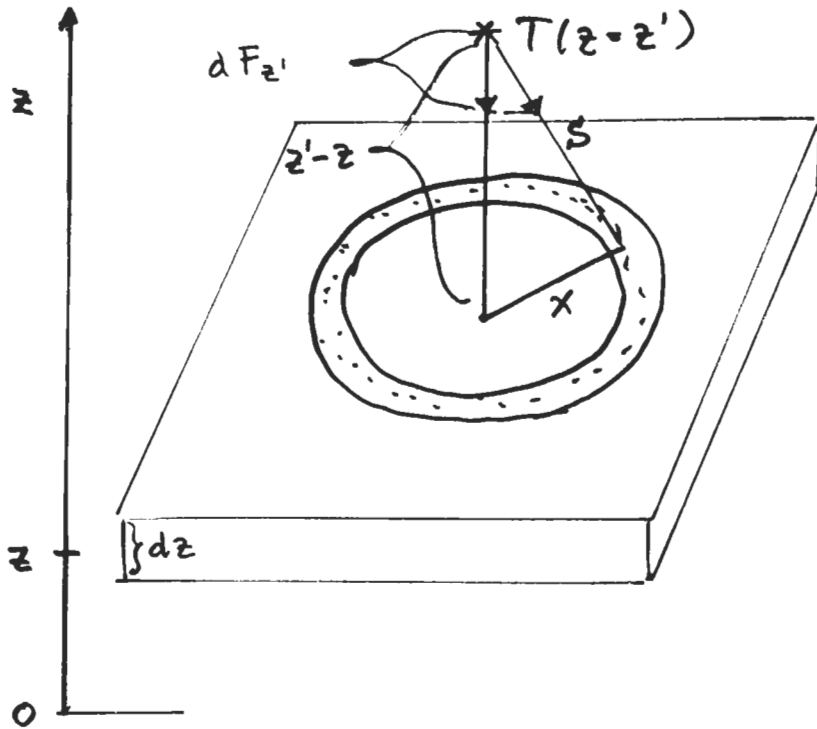
Akselien suhde on

$$\sigma_{\Pi} / \sigma_{\theta} = \sqrt{(A-B)/-B} = 1.47$$

Jos Π_0 on normaalisti jakautunut =>

Ellipsoidinen nopeusjakautuma tähdille!





Voimalaki F_z

Linnunrata tasapaksu ääretön levy.

Lisäksi homogeeninen, ts. tiheys=vakio xy-tason suuntaisissa tasoissa

Levystä leikatun x-säteisen ja dx paksuisen sylinterin vetovoima tähteen $T(z = z')$:

$$dF_{z'} = -G \cdot 2\pi x dx \cdot \rho(z) dz \cdot (1/s^2)(z' - z)/s$$

$$s = \sqrt{x^2 + (z - z')^2}$$

$$F_{z'} = -2\pi G \int_{-\infty}^{\infty} \rho(z) (z' - z) dz \int_0^{\infty} x dx [x^2 + (z' - z)^2]^{-3/2}$$

$$\int_0^{\infty} -1[x^2 + (z' - z)^2]^{-1/2} = \pm(z' - z)^{-1}$$

$z' > 0$: $F_{z'} = \pm 2\pi G \int_{-\infty}^{\infty} \rho(z) dz = -2\pi G \left[\int_{-\infty}^{-z'} \rho dz + \int_{-z'}^{z'} \rho dz - \int_{z'}^{\infty} \rho dz \right]$

Jos $\rho(-z) = \rho(z)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{-z'} \rho(z) dz = \int_{z'}^{\infty} \rho dz$$

$$F_{z'} = -4\pi G \int_0^{z'} \rho(z) dz$$

Riittävän pienille z:n arvoille $\rho(z) = \text{vakio} = \rho_0$

$\Rightarrow F_{z'} = -4\pi G \rho_0 \cdot z'$: harmoninen voima.

Tähden liike:

$$\ddot{z} = F_z = -C \cdot z$$

$$z = Q \sin \lambda t$$

$$\dot{z} = Q \cdot \lambda \cos \lambda t \Rightarrow \dot{z}_0 \cos \lambda t$$

Alkuehdot :

$$\left. \begin{array}{l} z = 0 \\ \dot{z} = \dot{z}_0 \end{array} \right\} \text{ kun } t = 0$$

$$z = \frac{\dot{z}_0}{\lambda} \sin \lambda t$$

$$\lambda = \sqrt{C} = \sqrt{4\pi G \rho_0} = 92.9 \text{ kms}^{-1}/\text{kpc}$$

$$\rho_0 = 0.15 \text{ } \pi_0 / \text{pc}^3$$

Värähdysaika z-suunnassa $P_z = 2\pi/\lambda = 6.59 \cdot 10^7 \text{ a}$

$$P_z/P_{\text{rot}} = 0.27$$

$$(P_z/P_{\text{osc}} = 0.37)$$

on siis paljon lyhyempi kuin Linnunradan pyörähdysaika, tahi värähdysaika episykliliikkeessä Linnunradan tasossa.

Esim. Auringon nopeus
(LSR:n suhteen)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_0 = -9.2 \text{ kms}^{-1} \\ \vartheta_0 = +12 \text{ kms}^{-1} \\ Z_0 = +6.9 \text{ kms}^{-1} \end{array} \right.$$

Ol. : Aurinko tällä hetkellä pisteessä $z = 0 \pm 4 \text{ pc}$
Aurinko liikkuu **yl**köspäin galaksin tasosta ja saavuttaa pisteen z_{max} ajan $P_z/4 = 1.65 \cdot 10^7 \text{ a}$ kuluttua.

$$z_{\text{max}} = Z_0/\lambda = 6.9 \text{ kms}^{-1}/92.9 \text{ kms}^{-1} \text{ kpc} = 74 \text{ pc}$$

$$\Pi = \Pi_0 \cos \mu t \quad \vartheta = \Theta(r) - \Theta_{\text{circ}}(r) = -\sqrt{B/(A-B)} \Pi_0 \sin \mu t$$

$$\tan \mu t = -\sqrt{(A-B)/B} \cdot \vartheta/\Pi_0 = -1.47 \cdot 12/-9.2 = +1.92$$

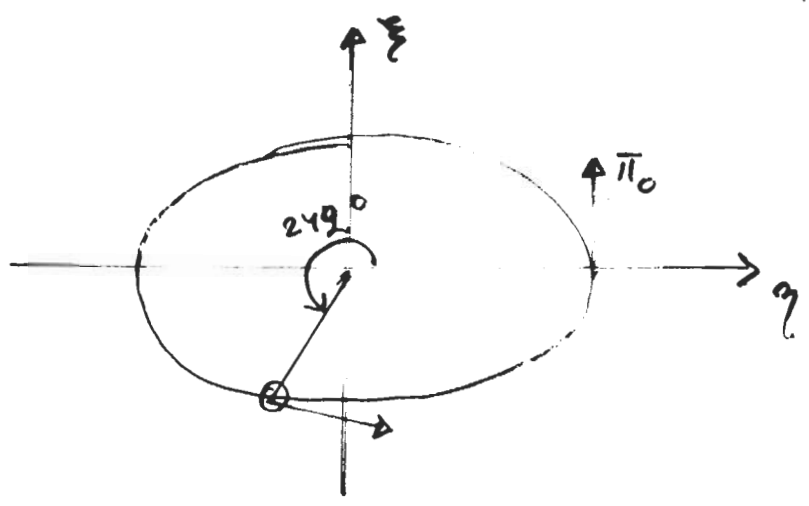
$$\mu t = 242^\circ$$

$$\cos \mu t = -0.46 = \Pi/\Pi_0 \Rightarrow \Pi_0 = -9.2/-0.46 \text{ kms}^{-1} = 20.0 \text{ kms}^{-1}$$

$$\xi = \frac{\Pi_0}{\mu} \sin \mu t$$

$$\eta = \frac{\Pi_0}{-2B} \cos \mu t$$

$$\mu = 2 \sqrt{-B(A - B)} = 36 \text{ kms}^{-1}/\text{kpc}$$



$$\Pi_0 = 20.0 \text{ kms}^{-1}$$

$$\frac{\Pi_0}{\mu} = \frac{550}{36} \text{ pc} = \text{Amplitudi}/2$$

radiaalisessa suunnassa

$$\frac{\Pi_0}{-2B} = 20.0/24 = \frac{830}{1050} \text{ pc} = \text{Amplitudi}/2$$

tangentialisessa suunnassa

Auringon tämänhetkinen ^{radiaalinen} etäisyys episykliellipsin keskipisteestä:

$$\xi = \frac{550}{36} \text{ pc} \cdot \sin 244^\circ = -490 \text{ pc}$$

Siis auringon keskimääräinen etäisyys galaksin keskustasta on noin ⁴⁹⁰ ~~610~~ pc suurempi kuin auringon nykyinen etäisyys R_0 .

7.5 Tähtien yleisistä radoista Linnunradan tasossa

Tässä luovutaan oletuksesta, että rata poikkeaa vain vähän ympyräradasta ja tarkastellaan mielivaltaista tähden rataa linnunradan tasossa. Tällöin ei voida enää käyttää episykliteoriaa, vaan on turvauduttava **numeeriseen integrointiin** rataa määrättäessä.

$$\text{Potentiaalifunktio} \quad \Phi(r) = -\int_0^r F(r') dr' \quad (z = 0)$$

$$d\Phi(r)/dr = -F(r)$$

Tähden liikevakiot:

$$\text{Energiaintegraali} \quad E_1 = (1/2)(\Pi^2 + \Theta^2) + \Phi(r) = \text{vakio}$$

$$\text{Pintaintegraali} \quad E_2 = r\Theta = \text{vakio}$$

$\Phi(r)$ tunnetaan empiirisessä muodossa Linnunradan rotaatiokäyrän perusteella : $-F(r) = d\Phi(r)/dr = \Theta_c^2/r$ $\Theta_c = \text{ympyräradalla nopeus}$

Numeerisessa integroinnissa edetään seuraavasti:

$$\text{Alkuarvot} : t = t_0 : r = r_0, \Theta = \Theta_0, \Pi = \Pi_0$$

Näistä lasketaan hetkellä: $t_1 = t_0 + \Delta t$ (väliaikaiset arvot):

$$r_1' = r_0 + \Pi_0 \Delta t ; \Theta_1' = \Theta_0 r_0 / r_1' \quad (\text{Pintaintegraalia käytetty})$$

$$\Pi_1' = [(\Pi_0^2 + \Theta_0^2) - \Theta_1'^2 + 2(\Phi_0 - \Phi(r_1'))]^{1/2} \quad (\text{Energiaintegraalia käytetty})$$

Parannetut arvot $t_1 = t_0 + \Delta t$

$$r_1 = r_0 + (1/2)(\Pi_0 + \Pi_1') \Delta t ; \Theta_1' = \Theta_0 r_0 / r_1$$

$$\Pi_1 = [(\Pi_0^2 + \Theta_0^2) - \Theta_1'^2 + 2(\Phi_0 - \Phi(r_1))]^{1/2}$$

Vastaavasti hetkellä $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ (väliaikaiset arvot)

$$r_{i+1}' = r_i + \Pi_i \Delta t ; \Theta_{i+1}' = \Theta_0 r_0 / r_{i+1}'$$

$$\Pi_{i+1}' = [(\Pi_0^2 + \Theta_0^2) - \Theta_{i+1}'^2 + 2(\Phi_0 - \Phi(r_{i+1}'))]^{1/2}$$

Parannetut arvot t_{i+1}

$$r_{i+1} = r_i + (1/2)(\Pi_i + \Pi_{i+1}') \Delta t ;$$

$$\Theta_{i+1} = \Theta_o r_o / r_{i+1}$$

$$\Pi_{i+1} = [(\Pi_o^2 + \Theta_o^2) - \Theta_{i+1}^2 + 2(\Phi_o - \Phi(r_{i+1}))]^{1/2}$$

Yhtä väliä Δt kohden voidaan käyttää useampiakin kuin kahta iterointia

r_{i+1} , Θ_{i+1} , Π_{i+1} laskemiseen.

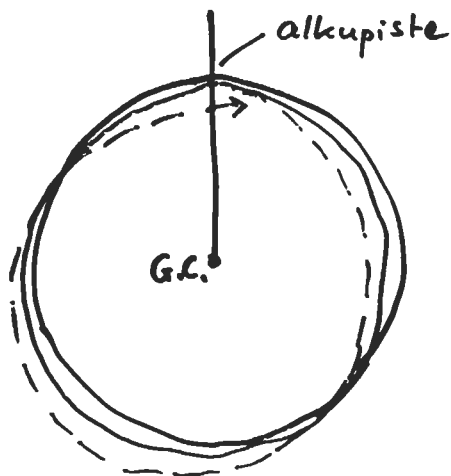
G. Contopoulos and B. Strömgen: Tables of Plane Galactic orbits (NASA 1965)

antavat numeerisesti integroituja ratoja useille eri alkunopeuksille

$$-100 \leq \Pi_o \leq 100 \text{ km/s}$$

$$-60 \leq \Theta_o - \Theta_{\text{circ}} \leq 20 \text{ km/s}$$

Oletetaan että $R_o = 10 \text{ kpc}$ ja $\Theta_{\text{circ}}(R_o) = 250 \text{ km/s}$

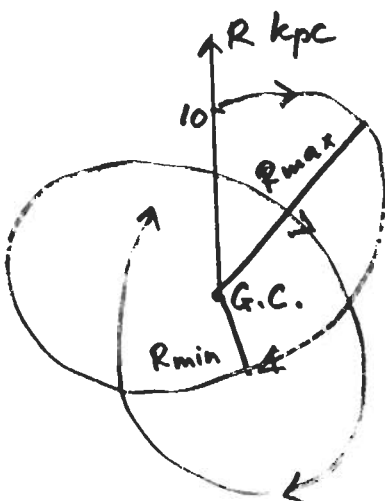


$$\text{—} \quad \Pi_o = 0 \quad \Theta_o = 250 \text{ km/s}$$

$$\text{- - -} \quad \Pi_o = -60 \text{ km/s} \quad \Theta_o = 250 \text{ km/s}$$

$$\text{—} \quad \Pi_o = -30 \text{ km/s} \quad \Theta_o = 250 \text{ km/s}$$

$$\text{- - -} \quad \Pi_o = 100 \text{ km/s} \quad \Theta_o = 190 \text{ km/s}$$



Radat eivät ole suljettuja,
mutta R_{max} ja R_{min} säilyvät
kierroksesta toiseen samoina.
Ellipsirataa vastaavasti voidaan
määrittellä "eksentrisyys":

$$e = (R_{\text{max}} - R_{\text{min}}) / (R_{\text{max}} + R_{\text{min}})$$

TABLE 13-1. Maximum and Minimum Distances from Galactic Center for Various Stellar Orbits $R_0 = 10 \text{ kpc}$ $\Theta_0 = 250 \text{ km s}^{-1}$

| $\Theta_1 - 250$ | $ \Pi_1 (\text{km/sec})$ | | | | | | | | | | |
|------------------------------|--------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 100 | 90 | 80 | 70 | 60 | 50 | 40 | 30 | 20 | 10 | 0 |
| -60 km/sec | | | | | | | | | | | |
| $r_{\text{max}}(\text{kpc})$ | 11.88 | 11.52 | 11.19 | 10.91 | 10.67 | 10.47 | 10.30 | 10.17 | 10.08 | 10.02 | 10.00 |
| $r_{\text{min}}(\text{kpc})$ | 5.52 | 5.60 | 5.68 | 5.76 | 5.83 | 5.90 | 5.95 | 6.00 | 6.03 | 6.06 | 6.06 |
| -50 km/sec | | | | | | | | | | | |
| $r_{\text{max}}(\text{kpc})$ | 12.13 | 11.72 | 11.36 | 11.04 | 10.77 | 10.54 | 10.35 | 10.20 | 10.09 | 10.02 | 10.00 |
| $r_{\text{min}}(\text{kpc})$ | 5.89 | 5.98 | 6.08 | 6.17 | 6.26 | 6.34 | 6.41 | 6.47 | 6.52 | 6.55 | 6.56 |
| -40 km/sec | | | | | | | | | | | |
| $r_{\text{max}}(\text{kpc})$ | 12.45 | 11.99 | 11.58 | 11.22 | 10.91 | 10.64 | 10.42 | 10.24 | 10.11 | 10.03 | 10.00 |
| $r_{\text{min}}(\text{kpc})$ | 6.26 | 6.37 | 6.49 | 6.60 | 6.71 | 6.81 | 6.90 | 6.98 | 7.04 | 7.08 | 7.09 |
| -30 km/sec | | | | | | | | | | | |
| $r_{\text{max}}(\text{kpc})$ | 12.88 | 12.35 | 11.88 | 11.47 | 11.10 | 10.79 | 10.52 | 10.30 | 10.14 | 10.04 | 10.00 |
| $r_{\text{min}}(\text{kpc})$ | 6.63 | 6.76 | 6.90 | 7.03 | 7.16 | 7.29 | 7.41 | 7.52 | 7.61 | 7.66 | 7.68 |
| -20 km/sec | | | | | | | | | | | |
| $r_{\text{max}}(\text{kpc})$ | 13.44 | 12.84 | 12.30 | 11.82 | 11.39 | 11.02 | 10.69 | 10.41 | 10.20 | 10.05 | 10.00 |
| $r_{\text{min}}(\text{kpc})$ | 6.99 | 7.14 | 7.30 | 7.46 | 7.62 | 7.78 | 7.94 | 8.09 | 8.22 | 8.31 | 8.34 |
| -10 km/sec | | | | | | | | | | | |
| $r_{\text{max}}(\text{kpc})$ | 14.17 | 13.51 | 12.90 | 12.34 | 11.83 | 11.38 | 10.98 | 10.63 | 10.32 | 10.09 | 10.00 |
| $r_{\text{min}}(\text{kpc})$ | 7.34 | 7.51 | 7.68 | 7.86 | 8.05 | 8.25 | 8.45 | 8.66 | 8.86 | 9.02 | 9.10 |
| 0 km/sec | | | | | | | | | | | |
| $r_{\text{max}}(\text{kpc})$ | 15.01 | 14.37 | 13.72 | 13.10 | 12.52 | 11.99 | 11.51 | 11.08 | 10.69 | 10.33 | 10.00 |
| $r_{\text{min}}(\text{kpc})$ | 7.66 | 7.85 | 8.03 | 8.23 | 8.44 | 8.66 | 8.90 | 9.15 | 9.41 | 9.70 | 10.00 |
| 10 km/sec | | | | | | | | | | | |
| $r_{\text{max}}(\text{kpc})$ | | | 14.74 | 14.13 | 13.53 | 12.95 | 12.42 | 11.95 | 11.55 | 11.26 | 11.14 |
| $r_{\text{min}}(\text{kpc})$ | | | 8.35 | 8.55 | 8.77 | 9.00 | 9.23 | 9.47 | 9.71 | 9.91 | 10.00 |
| 20 km/sec | | | | | | | | | | | |
| $r_{\text{max}}(\text{kpc})$ | | | 15.74 | 15.26 | 14.76 | 14.26 | 13.77 | 13.33 | 12.98 | 12.74 | 12.66 |
| $r_{\text{min}}(\text{kpc})$ | | | 8.61 | 8.81 | 9.02 | 9.24 | 9.45 | 9.65 | 9.83 | 9.95 | 10.00 |

Source: Adapted from G. Contopoulos and B. Strömberg, *Tables of Plane Galactic Orbits*, New York: NASA Institute for Space Studies, 1965, p. 23, by permission.

TABLE 13-2. Comparison of Epicycle Theory and Direct Calculation

| $ \Pi_1 (\text{km/sec})$ | $\Theta_1 = 250 \text{ km/sec}$ | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|-------|-------------------------------------|-------|---|-------|
| | $\Delta r_{\text{max}}(\text{kpc})$ | | $\Delta r_{\text{min}}(\text{kpc})$ | | $P_{\text{osc}} \times 10^{-7} \text{ years}$ | |
| | Epicycle | Calc. | Epicycle | Calc. | Epicycle | Calc. |
| 10 | 0.316 | 0.33 | -0.316 | -0.30 | 19.4 | 19.5 |
| 20 | 0.632 | 0.69 | -0.632 | -0.59 | 19.4 | 19.7 |
| 30 | 0.948 | 1.08 | -0.948 | -0.85 | 19.4 | 20.0 |
| 40 | 1.265 | 1.51 | -1.265 | -1.10 | 19.4 | 20.4 |
| 50 | 1.581 | 1.99 | -1.581 | -1.34 | 19.4 | 21.0 |
| 60 | 1.897 | 2.52 | -1.897 | -1.56 | 19.4 | 21.6 |

Source: Adapted from G. Contopoulos and B. Strömberg, *Tables of Plane Galactic Orbits*, New York: NASA Institute for Space Studies, 1965, p. 30 by permission.

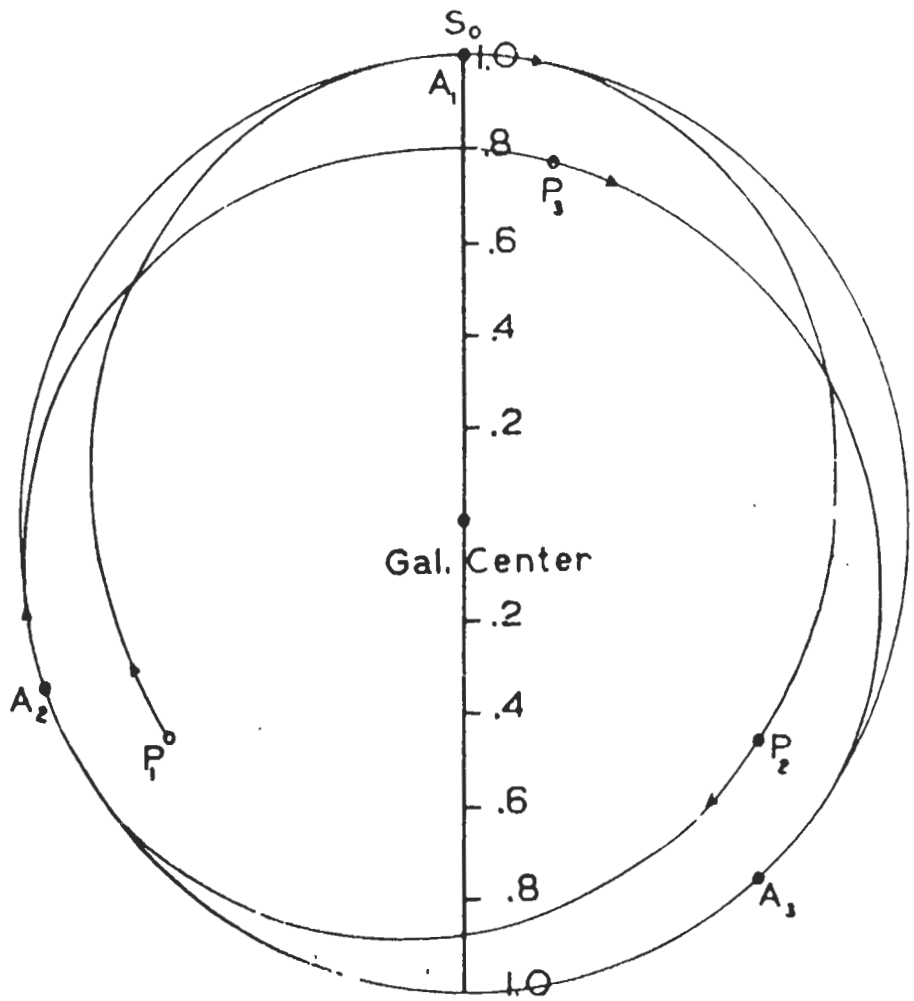


Figure 6.16 Galactic orbit calculated with observed force law for a star in the vicinity of the sun with a peculiar velocity of 30 km/sec in galactic longitude 235° .

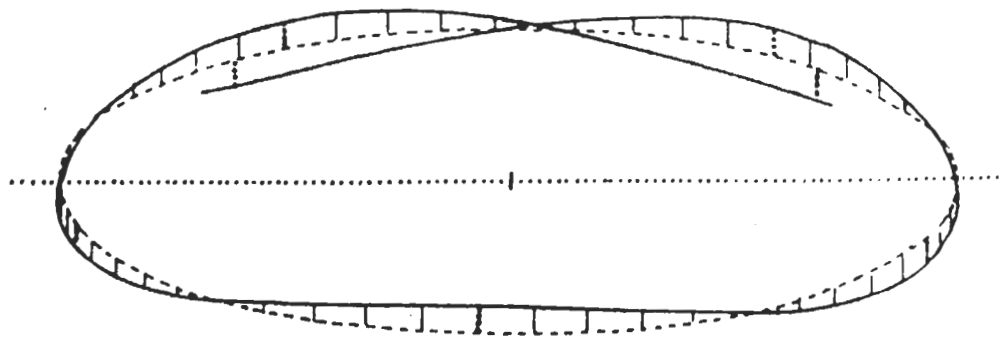


Figure 6.20 Galactic orbit with motion perpendicular to galactic plane.

8. Linnunradan massatiheys auringon lähiympäristössä

Tutkitaan (massa)tiheyttä ρ (g/cm^3 tai π_{\odot}/pc^3)

Linnunradassa: $\rho = \rho(x, y, z) = \rho(R, \vartheta, z)$

Tämä massan jakautuma aiheuttaa vetovoimakentän, jonka potentiaalifunktio saadaan Poisson'in kaavasta:

$$\Delta\Phi = \nabla^2\Phi = 4\pi G\rho(x, y, z)$$

Suorakulmaisissa koordinaateissa x, y, z :

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2 \phi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y, z)}{\partial z^2} = 4\pi G\rho(x, y, z)$$

$$- \frac{\partial F_x}{\partial x} \quad - \frac{\partial F_y}{\partial y} \quad - \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\text{Sylinterikoordinaateissa: } \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{F_r}{r} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = -4\pi G\rho(x, y, z)$$

Kun tarkastellaan Linnunrataa levynä, jossa massatiheys $\rho = \rho(z)$ ei riipu pisteen x, y (tai R, ϑ) koordinaateista saadaan:

$$\partial F_x / \partial x = \partial F / \partial y = 0 \quad \text{eli} \quad \partial F_z / \partial z = -4\pi G\rho(z)$$

joka johdettiin jo aikaisemmin § 7.2. d)

Tästä kaavasta

$$\partial F_z / \partial z = -4\pi G\rho(z)$$

nähdään, että massatiheys $\rho(z)$ voidaan määrätä kunhan vetovoiman kiihtyvyys z - suunnassa $F_z(z)$ tunnetaan z :n funktiona.

Kun z on pieni ≈ 0 (tähti galaksin tasossa) saadaan:

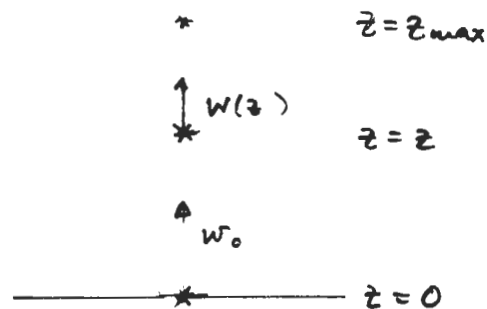
$$\partial F_z / \partial z = -4\pi G\rho(0) \Rightarrow F_z = -4\pi G\rho(z) \cdot z \quad (\text{harmoninen voima})$$

a) Yksi tähti

Merkitään tähden nopeus z- suunnassa $w(z)$, $w_0 = w(0)$

Energiaintegraali:

$$(1/2)w^2(z) - \int_0^z F_z \cdot dz' = (1/2)w_0^2 = E$$



Siis seuraamalla tähden nopeuden muuttumista sen värhdellessä z-suunnassa olisi mahdollista määrätä $F_z(z)$ ja sen avulla sitten $\rho(z)$. Tämä vaatisi kuitenkin vähintään n. 10^7 vuotta.

b) Tähdillä samat energiat:

Periaatteessa samaan tulokseen päästäisiin tarkastelemalla tähtiä, joilla kaikilla **sama kokonaisenergia**, ts. em. yhtälössä kaikilla sama E. Näillä tähdillä on silloin kaikilla sama nopeus $\pm w_0$ niiden kulkiessa Linnunradan tason läpi, ja sama maksimietäisyys z_{max} Linnunradan tasosta.

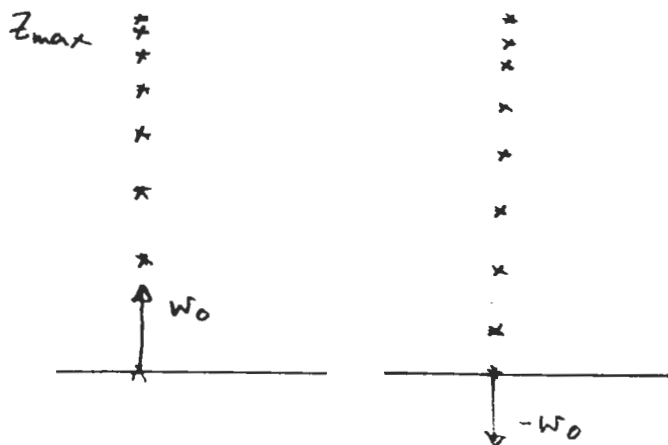
Oletetaan vielä, että nämä tähdet ovat "hyvin sekoittuneet", ts. että tähtiä on kaikissa värhdyksliikkeen vaiheissa. Voidaan ajatella, että Linnunradan tason läpi menee tasaisin väliajoin tähtiä.

Tähtien lukumäärä kerroksessa

$$dz : z - dz/2, z + dz/2$$

on verrannollinen siihen aikaan dt jonka kukin tähti viettää tässä z-välissä:

$$dt = dz/w(z)$$



Tähden paikka tasaisin väliajoin puolen värhdyksen kuluessa (kaavamaisesti esitettynä)

Merkitään $D_{w_0}(z)dz =$ sellaisten tähtien lukumäärä välissä $z - dz/2 \dots z + dz/2$, joilla nopeus w_0 Linnunradan tason läpi kulkiessaan

$$D_{w_0}(z)dz / D_{w_0}(0)dz = (dz/w(z)) / (dz/w_0) = w_0/w(z)$$

$$D_{w_0}(z) / D_{w_0}(0) = w_0 \sqrt{w_0^2 + 2 \int_0^z F_z dz'} > 1$$

< 0 , koska $F_z < 0$

Tarkastelun tulos: Tähtien avaruusjakautumasta z -suunnassa $D_{w_0}(z)$ voidaan johtaa vetovoiman kiihtyvyyttä $F_z(z)$

c) Tähdillä eri energiat

Todellisuudessa ei voida erottaa saman energian $E = (1/2)w_0^2$ omaavia tähtiä muista tähdistä erilleen. Sen vuoksi tarkastellaan tilannetta tähtipopulaatiolle, jolla w_0 -nopeudet ovat jakautuneet ellipsoiditeorian mukaisesti:

$$z = 0 \quad \Phi_0(w_0) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{w_0^2}{\sigma^2}}$$

Tässä on siis tähtiä, joilla erilaiset nopeudet w_0 ja siis erilaiset kokonaisenergiat $E = (1/2)w_0^2$

Tarkasellaan tilannetta samoille tähdille kun $z = z$:

Tällöin kullekin tähdelle voidaan laskea

$$w(z) = \sqrt{w_0^2 + 2 \int_0^z F_z dz'}$$

$$\left(\begin{array}{l} w(z)^2 = w_0^2 + 2 \int_0^z F_z dz' \\ 2 w(z) dz = 2 w_0 dw_0 \end{array} \right)$$

Missä $\int_0^z F_z dz'$ ei riipu w_0 :sta ja on sama kaikille tähdille. $\Rightarrow w(z)dw = w_0 dw_0$

$$dw/dw_0 = w_0/w$$

Tähtitiheys tarkasteltaville tähdille: $D(z)$

(nopeus mikä vain)

$$D_0 = D(0)$$

Tähtitiheys kun nopeus on $w_0 - dw_0/2 \dots w_0 + dw_0/2$:

$$D_{w_0}(0)dw_0 = D_0 \Phi_0(w_0)dw_0$$

Tähtitiheys etäisyydellä z , nopeus $w - dw/2 \dots w + dw/2$

$$(jossa (1/2)w^2 = (1/2)w_0^2 + \int_0^z F_{z'} dz')$$

$$D_{w_0}(z)dw = D(z)\Phi(w)dw$$

$$D_{w_0}(z)dw / D_{w_0}(0)dw_0 = \underbrace{w_0/w(z)}_{\substack{\text{edell. sivun} \\ \text{mukaan}}} \cdot \underbrace{(D(z)/D_0)}_{\substack{\text{edell. sivun} \\ \text{mukaan}}} \cdot (\Phi(w)dw / \Phi_0(w_0)dw_0)$$

$$dw/dw_0 = w_0/w$$

$$\Rightarrow D(z)\Phi(w) = D_0 \cdot \Phi_0(w_0) \Rightarrow$$

$$D(z)\Phi(w) = D_0 \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{w_0^2}{\sigma^2}} \\ = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{w^2}{\sigma^2}} \cdot D_0 e^{\frac{1}{\sigma^2} \int_0^z F_{z'} dz'}$$

$$\text{eli } \begin{cases} \Phi(w) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{w^2}{\sigma^2}} = \Phi_0(w) \\ D(z) = D_0 \cdot e^{-\frac{1}{\sigma^2} \int_0^z F_{z'} dz'} \end{cases}$$

Tarkastelun tulos:

1) $D(z)$ antaa $F_z(z)$:n

2) Nopeusjakautuma ei muutu z :n funktiona

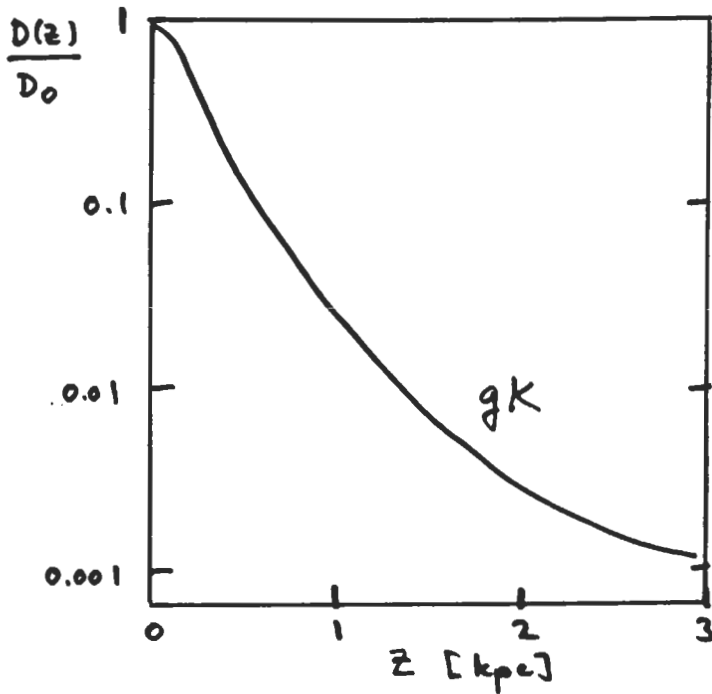
d) Kiihtyvyyden $F_z(z)$ ja massatiheyden ρ_0 määrittäminen havaitusta avaruusjakautumasta $D(z)$

Edellisestä kaavasta saadaan:

$$F_z(z) = \sigma^2 \cdot \frac{d \ln[D(z)/D_0]}{dz}$$

Havaintomateriaalina käytetty K jättiläisiä (gK), joita voidaan havaita helposti n. $z = 3$ kpc saakka.

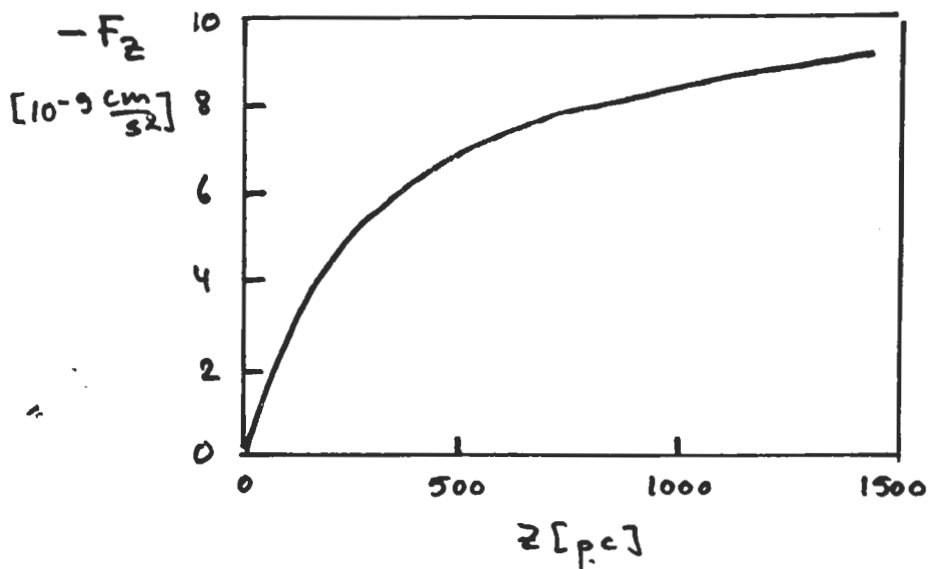
E. R. Hill (1960, BAN 15, 1)



Kuva: gK tähtien avaruusjakautuma z -suunnassa

Lisäksi tarvitaan nopeusdispersio z -suunnassa $\sigma \approx 16$ km/s

Em. kaavasta saadaan silloin viereinen tulos: Linnunradan vetovoiman kiihtyvyys F_z



Nähdään että pienillä z :n arvoilla

$$-F_z \propto z : \text{harmoninen voima}$$

Suuremmilla z :n arvoilla on $-F_z$:n kasvu hitaampaa.

Saadun $F_z(z)$ käyrän avulla voidaan nyt määrätä massatiheys ρ_0 auringon lähellä:

$$\text{Poissonin yhtälö } \Delta\Phi = 4\pi G\rho$$

Lausutaan sylinterikoordinaateissa:

$$\frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{F_r}{r} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = -4\pi G\rho(x,y,z) \quad | \text{ termi 1 } \ll \partial F_z/\partial z$$

$$\text{termi 1 } \ll \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \text{Tässä } F_r &= -\Theta_{\text{circ}}^2/r; & \partial F_r/\partial r &= -(2\Theta_c/r)(d\Theta_c/dr) + \Theta_c^2/r^2 \\ & & &= -F_r/r \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\partial F_r/\partial r - F_r/r = (2\Theta_c/r)(d\Theta_c/dr)$$

$$\text{Auringon lähellä} \quad \Theta_c/r = \Theta_0/R_0 = A - B$$

$$(d\Theta_c/dr)_{R_0} = -(A + B)$$

$$-\text{termi 1} = -\frac{\partial F_r}{\partial r} - \frac{F_r}{r} = -2(A - B)(A + B) = -127 \text{ km}^2/\text{s}^2\text{kpc}^2$$

$$4\pi G\rho = -(\partial F_z/\partial z) - 2(A - B)(A + B)$$

$$\begin{aligned} (-\partial F_z/\partial z)_{z=0} &= \underline{250 \cdot 10^{-9} \text{ cm s}^{-2}/100\text{pc}} & &= 250 \cdot 10^{-11} \cdot 1\text{cm}/3.1 \cdot 10^{18} \text{ cm s}^{-2} \\ & \text{edell. sivun kuvasta} & &= 0.81 \cdot 10^{-29} \text{ s}^{-2} = 81 \times 10^{-31} \text{ s}^{-2} \end{aligned}$$

termi 1 =

$$-A(A - B)(A + B) = -127 \cdot 1 \text{ km}^2/(3.1 \cdot 10^{16})^2 \text{ km}^2 \cdot \text{s}^{-2} = 1.32 \cdot 10^{-31} \text{ s}^{-2}$$

$$\rho_0 = \frac{79.7}{78.4} \cdot 10^{-31} \text{ s}^{-2}/4\pi G = \frac{79.7}{78.4} \cdot 10^{-31}/(12.6 \cdot 6.67 \cdot 10^{-8}) \approx \frac{9.6}{9.3} \cdot 10^{-24} \text{ gcm}^{-3}$$

Oort (1965, Stars & Stellar systems V):

Massatiheyden todennäköisin arvo

$$\rho_0 = 10.0 \cdot 10^{-24} \text{ gcm}^{-3} = 0.148 \text{ } \mu\text{M}_{\odot}/\text{pc}^3$$

e) Massatiheys ρ_0 ja ns. "missing mass" probleema

Edellä saatua ρ_0 :n arvoa voidaan verrata suoraan havainnoista saatavaan erilaisten materian ilmenemismuotojen yhteenlaskettuun massatiheyteen (Oort 1965 Stars & St. systems V):

| | | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|---|--|
| HI kaasu(21-cm) | $1.3 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3$ | } | $0.030 \text{ } M_{\odot}/\text{pc}^3$ |
| HII, He+ ääripop I tähdet | 0.7×10^{-24} | | |
| Tähdet | 4.0×10^{-24} | | |
| <hr/> | | | |
| Tunnettu materia yht. | 6.0×10^{-24} | | 0.090 |
| ρ_0 gravitaatiovaik. avulla | 10.0 | | 0.150 |
| <hr/> | | | |
| "Puuttuva massa" (missing mass) | 4.0 | | 0.060 |

Viime aikojen tuloksia:

1) Molekulaarinen vety H_2
(Carruthers, 1970)

0.018

2) M-luokan kääpiötähdet
(Weistrop 1972)

0.015 - 0.100 ?

$\Sigma = 0.123$

f) Massa-kirkkaus suhde (Mass to light ratio)

Luminositeettifunktiosta $\Phi(M)$ voidaan laskea 1 pc^3 :ssa olevien auringon lähiympäristön tähtien säteilemä valo auringon lumunositeetin yksiköissä ($M_{\odot} = 5.67 \text{ mag}(\text{pg.})$)

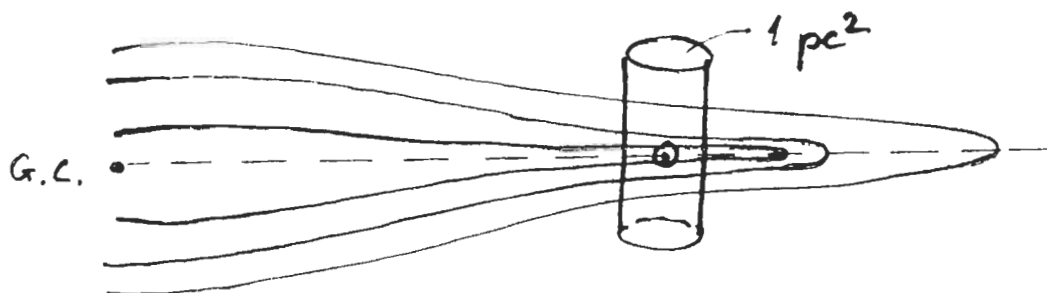
$$L/L_{\odot} = \sum \Phi(M) \cdot 10^{-0.4(M - M_{\odot})} = 0.068$$

jossa $\Phi(M)$ = lukum. pc^3 :ssa

$$\text{Mass to light ratio } M/L = 0.150 \text{ } M_{\odot}/\text{pc}^3 / 0.068 \text{ } L_{\odot}/\text{pc}^3 = 2.2 \text{ } M_{\odot}/L$$

g) Massa-kirkkaus suhde Linnunradan läpi menevässä sylinterissä

Tämä on suure, jota voidaan verrata muissa galakseissa havaittuihin massa-kirkkaus suhteisiin.



Tarkastellaan 1 pc² poikkipinta-alan omaavaa sylinteriä joka menee koko linnunradan läpi (z = -∞ ---- z = + ∞) Auringon kohdalla.

Sylinterissä oleva massa /pc²

$$M' = \rho_0 \int_{z=-\infty}^{\infty} (\rho(z)/\rho_0) dz = 70 \text{ (a), } \boxed{79 \text{ (b)}} \text{ } 281 \text{ (c) } \mu_0 = 0.15 \times Z$$

riippuen siitä miten tuntemattoman massan ("missing mass") oletetaan jakautuneen:

(a) "missing mass" jakautunut kuten interstellaarinen kaasu (pop. I)

(b) " " " " tavalliset tähdet (disk pop)

(c) " " " " populaatio II tähdet

Sylinterin säteilemä valo /pc²

$$L' = L_0 \int (L(z)/L_0) dz = 0.068 L_0 / pc^3 \cdot \bar{z} = 21 L_0 / pc^2 \text{ (pg)}$$

Saadaan tähtilaskennoista Linnunradan napojen suunnassa,

Saadaan siis: $M'/L' = \left. \begin{matrix} 3.4 \text{ (a), } M_0/L_0 \\ \boxed{3.8 \text{ (b), } " \\ 14.4 \text{ (c) } \mu_0 - \end{matrix} \right\} \text{ Linnunradan läpi menevässä sylinterissä}$

Vrt. M31: $M'/L' \geq 3.8$