Linnunradan rakenne – harjoitus 6 syksy 2022

Ratkaisut on palautettava ma 05.12. klo 12 mennessä kurssin Moodle-sivulle.

1. Oletetaan, että galaksin massatiheys ρ on pallosymmetrinen ja riippuu keskustasta lasketusta etäisyydestä r seuraavasti:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + (r/r_0)^2} \, ,$$

missä ρ_0 ja r_0 ovat vakioita.

   (a) Esitä lausekkeet massalle $M(r)$ ja ympyräliikkeen nopeudelle $V_c(r)$ säteen r funktiona.

   (b) Hahmottele $M(r)$- ja $V_c(r)$-jakaumien muoto antamalle kaikille vakioille (ρ_0, r_0, G = gravitaatiovakio) arvo 1.

2. Widmark & Monarin (2019, MNRAS 482, 262) mukaan paikallinen massatiheys Linnunradan tasossa on $\rho_0 = 0.12\,M_\odot/\mathrm{pc}^3$. He arvioivat lisäksi, että Aurinko on tällä hetkellä korkeudella $z = 15.3\,\mathrm{pc}$ ja liikkuu ylöspäin galaksin tasosta nopeudella $7.2\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

   (a) Laske luennolla 11 esitetyn mallin mukaan Auringon z-suuntaisen liikkeen ”jousivakio” λ ja periodi P_z.

   (b) Laske Auringon nopeus sen ohittaessa Linnunradan tason sekä liikkeen amplitudi.

3. Oleta, että tähti on radallaan kokenut pienen radiaalisen ja vertikaalisen poikkeaman, ξ ja z vastaavasti, Linnunradan tasossa säteellä $R = R_0$ tapahtuvasta ympyräliikkeestä. Kirjoita lausekkeet tähden potentiaalienergialle ja kineettiselle energialle massayksikköä kohti R_0:n, Θ_0:n, ξ:n ja z:n funktiona olettaen, että R:n ja z:n suuntaiset nopeudet tasapainoasemassa ovat Π_0 ja Z_0.

   Ohje: Tähden liikeyhtälöt voidaan tässä tapauksessa kirjoittaa muodossa

$$\ddot{\xi} = -\kappa^2 \xi, \quad \ddot{z} = -\lambda^2 z$$

ja värähtelyliikkeen potentiaalienergiat saadaan näistä integroimalla.

4. Jos oletetaan, että Linnunradan gravitaatiopotentiaali $\Phi = \Phi(R)$ riippuu vain keskustasta lasketusta etäisyydestä, on tähden impulssimomentti massayksikköä kohti, $l = R\Theta$, vakio. Energiaintegraali voidaan tällöin kirjoittaa

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\dot{R}^2 + \frac{l^2}{R^2}\right) + \Phi(R) = \frac{1}{2}\dot{R}^2 + \left(\Phi(R) + \frac{l^2}{2R^2}\right).$$

Tämän perusteella radiaalisen liikkeen voidaan ajatella tapahtuvan yhdessä ulottuvuudessa efektiivisessä potentiaalissa

$$\Phi_{\text{eff}}(R) = \Phi(R) + \frac{l^2}{2R^2}.$$

Termiä $l^2/(2R^2)$ kutsutaan joskus keskipakoisenergiaksi tai keskipakoisvalliksi.

Osoita että säteen $R = R_0$ ympäristössä episyklitaajuuden neliö κ^2 on efektiivisen potentiaalin toinen derivaatta R:n suhteen:

$$\kappa^2 = \left(\frac{\partial^2 \Phi_{\mathrm{eff}}}{\partial R^2}\right)_{R=R_0}.$$

Tämä pätee muuallakin missä potentiaali on aksiaalisymmetrinen, mutta tässä tehtävässä voit käyttää κ:n esitystä Oortin vakioiden avulla, $\kappa^2 = -4B(A - B)$.

5. Oleta, että galaksin rotaatiokäyrä on laakea, ts. ratanopeus $V(R) =$ vakio, ja että sillä on neljä spiraalihaaraa ($m = 2$), joiden kulmanopeus on Ω_{P}.
   (a) Esitä lausekkeet myötäpyörimissäteelle R_{C} sekä Lindbladin resonanssisäteille, R_{ILR} ja R_{OLR}.
   (b) Laske näiden säteiden arvot, kun $V = 230\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ ja $\Omega_{\mathrm{P}} = 40\,\mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$.

   Ohje: Episyklitaajuuden neliö voidaan yleisessä tapauksessa kirjoittaa esim. muotoon

$$\kappa^2 = 4\Omega^2 + 2R\Omega\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}R}$$

   (vrt. $\kappa^2 = -4B(A - B)$ Oortin vakioiden avulla).