



Linnunradan rakenne (FYS2053)

Luento 10: Linnunradan rotaatio ja tähtien radat

Jorma Harju

14.11.2022, Exactum D123

Tällä luennolla käsitellään

1. Linnunradan rotaatiovakioiden R_0 ja Θ_0 määrittäminen
2. Linnunradan rotaatiokäyrä
3. Pimeän aineen vaikutus rotaatiokäyrään
4. Tähtien liikeyhtälö
5. Pieni poikkeama ympyräliikkeestä

Linnunradan rotaatiovakioiden R_0
ja Θ_0 määrittäminen

Linnunradan keskuksen etäisyys R_0 (I)

Auringon etäisyyttä Linnunradan keskuksesta tarvitaan rotaatiokäyrän määrittämiseen.

Etäisyys R_0 on myös tärkeä mittatikka extragalaktisten etäisyyksien kannalta.

V. 1985 annetun IAU:n suosituksen mukaan $R_0 = 8.5$ kpc,
 $\theta_0 = 220 \text{ km s}^{-1}$

(v. 1965 suosituksessa nämä olivat $R_0 = 10$ kpc, $\theta_0 = 250 \text{ km s}^{-1}$)

Viimeaikaiset määritykset lähestyvät arvoja $R_0 \approx 8.1$ kpc,
 $\theta_0 \approx 230 \text{ km s}^{-1}$

Linnunradan keskuksen etäisyys R_0 (II)

Linnunradan keskuksen etäisyyttä on määrätty lukuisilla tilastollisilla tavoilla, mm. seuraavasti:

Pallomaisten tähtijoukkojen avaruusjakautumasta (etäisyydet kefeidien ja RR Lyrae -tähtien avulla)

RR Lyrae tähtien jakautumasta Linnunradan keskuksen suunnassa

Epäsuorasti käyttäen mallia Linnunradan rotaatiolle. Havaittavina kohteina ovat olleet mm. OB-tähdet, massiivisiin prototähtiin liittyvät H_2O -maserit, Mira-muuttajat ja HII-alueet, joiden etäisyydet on voitu arvioida.

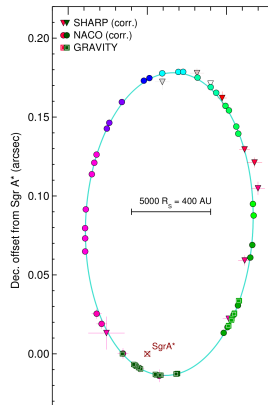
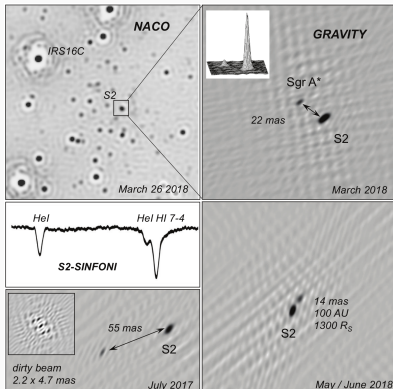
Rotaatiomalli on fiksattu esim. olettamalla tietty arvo Oortin vakiolle A , kulmanopeudelle $\Omega_0 = A - B$, tai ratanopeudelle Θ_0 .

Linnunradan keskuksen etäisyys R_0 (III)

H₂O-masereiden parallaksi Linnunradan ytimen lähellä sijaitsevassa jättiläismolekyylipilvessä Sgr B2.

Mittaukset on tehty radiointerferometriaa käyttäen (VLBA)

Linnunradan keskuksen mustaa aukkoa (SgrA*) kiertävien tähtien rata (GRAVITY Collaboration, A&A 615, L15 2018)



Kiertonopeus Θ_0

Ympyräliikkeen nopeus auringon etäisyydellä, Θ_0 , voidaan laskea, jos kulmanopeus Ω_0 and etäisyys R_0 tunnetaan: $\Theta_0 = R_0 \Omega_0$

Kulmanopeus saadaan Oortin vakioista $\Omega_0 = A - B$.

Auringon kulmanopeus on myös suoraan määrätty VLBI-tekniiklla Sgr A* ominaisliikkeestä, Reid & Brunthaler (2020):

$$\Omega_{\odot} \approx 6.4 \text{ mas yr}^{-1} \approx 30 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}.$$

Auringon (ja mahdollisesti myös LSR:n) pekuliaariliikkeen takia tämä eroaa hiukan ympyräliikkeen nopeudesta Ω_0 .

Jos tiettyä tähtipopulaatiota käyttävässä tilastollisessa tutkimuksessa on pystytty määrittämään sekä säteisnopeudet että etäisyydet, tuloksena saadaan kulmanopeus Ω_0 ja sen gradientti sekä auringon pekuliaarinopeudet LSR:n suhteen (U_{\odot}, V_{\odot}). Galaktosentrinen säde R_0 joudutaan kuitenkin yleensä oletamaan.

Θ_0 :n määrittäminen

Seuraavassa tarkastellaan joitakin aiemmin käytettyjä menetelmiä Auringon nopeus *galaksien* suhteen saadaan radiaalinopeuksista vastaavalla tavalla kuten Auringon apeksi määrättiin. Tämä on korjattava Auringon pekuliaariliikkeen takia LSR:n suhteen. Tulos $\Theta_0 = 290 \pm 30 \text{ kms}^{-1}$ ($l = 106^\circ, b = -6^\circ$)

Pallomaisten joukkojen radiaalinopeuksista. Tämä antaa kuitenkin vain alarajan Θ_0 :lle koska myös pallomaisten joukkojen muodostama järjestelmä on rotaatiossa samaan suuntaan kuin LSR ja aurinko.

Tuloksia: Mayall (1946) $\Theta_0 \approx 200 \pm 25 \text{ kms}^{-1}$ ($l = 87^\circ, b = 0^\circ$)

Kinman (1959) $\Theta_0 \approx 167 \pm 30 \text{ kms}^{-1}$ ($l = 90^\circ, b = 0^\circ$)

Tähtien pakonopeuden avulla: Tähtien nopeus FSR:ssä Π, Θ, Z

Tähti poistuu Linnunradasta, jos sen nopeus v ylittää pakonopeuden v_{esc} :

$$v^2 = \Pi^2 + \Theta^2 + Z^2 > v_{\text{esc}}^2$$

Kiertonopeus Θ_0 pakonopeudesta II

Eri suunnissa mitattujen äärimmäisten nopeuksien kautta sovitaan pallon pinta.

Keskipisteeksi on saatu $\Theta_0 = 276 \pm 21 \text{ km s}^{-1}$ ja pakonopeudeksi tulee $v_{\text{esc}} = 276 + 63 = 339 \text{ km s}^{-1}$

Yleisesti pakonopeus tietyssä Linnunradan pisteessä määräytyy Linnunradan gravitaatiopotentiaalin $\Omega(x, y, z)$ perusteella. Tähtien energia:

$$E = \frac{1}{2}m(\Pi^2 + \Theta^2 + Z^2) - m\Omega(x, y, z)$$

Tähti poistuu Linnunradasta, jos $E \geq 0$

$$\begin{cases} \Pi^2 + \Theta^2 + Z^2 \geq 2\Omega(x, y, z) = v_{\text{esc}}^2 \\ v_{\text{esc}} = \sqrt{2\Omega} \end{cases}$$

Linnunradan rotaatiokäyrä

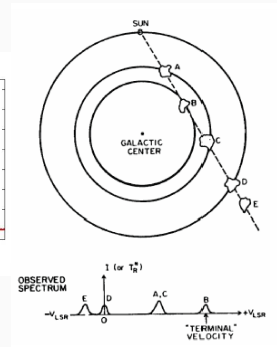
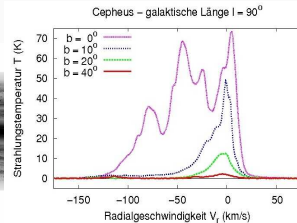
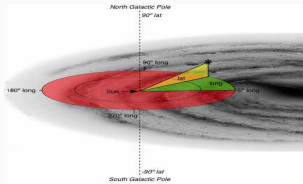
Linnunradan rotaatiokäyrä I

Vakiot A , B ja Θ_0 kuvaavat Linnunradan rotaatiota vain auringon lähiympäristössä

Linnunradan rotaatiokäyrää $\Theta(R)$ voidaan tutkia vedyn tai hiilimonoksidin viivaemission avulla

Kussakin suunnassa havaitaan vedyn 21cm viivan profiili, joka on yhdistelmä eri etäisyyksillä Linnunradassa olevien vetypilvien säteilystä.

Linnunradan differentiaalirotaation takia eri etäisyyksiin liittyvät erilaiset säteisnopeudet.



Linnunradan rotaatiokäyrä II

Kiertonopeus voidaan määrätä soveltamalla säteisnopeuden kaavaa

$$v_r = R_0 [\omega(R) - \omega_0(R)] \sin l$$

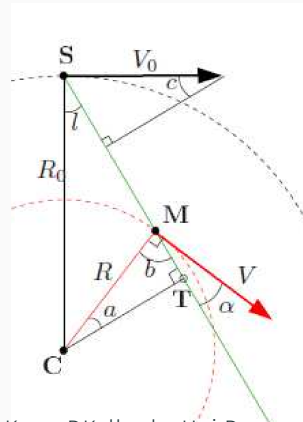
Vaikeutena on etäisyyden R määrittäminen.

Tässä voidaan käyttää oletusta että maksimiarvo $|v_r(\max)|$ saavutetaan oheisen kuvan pisteessä T , jolle $R = R_{\min} = R_0 \sin l$

Vaikeuksia: ei-ympyränmuotoiset liikkeet, vedyn epähomogeeninen jakautuma, pisteessä P ei aina olekaan vetypilveä.

Linnunradan ulko-osissa ($R \geq 8$ kpc) voidaan tehdä optisia havaintoja. Parhaat tulokset saatu kefeidien ja HII-alueiden avulla säteelle $R = 13$ kpc asti.

Tuloksena saadaan, että alueessa $3 \leq R \leq 13$ kpc kiertonopeus $\Theta(R)$ muuttuu varsin vähän!



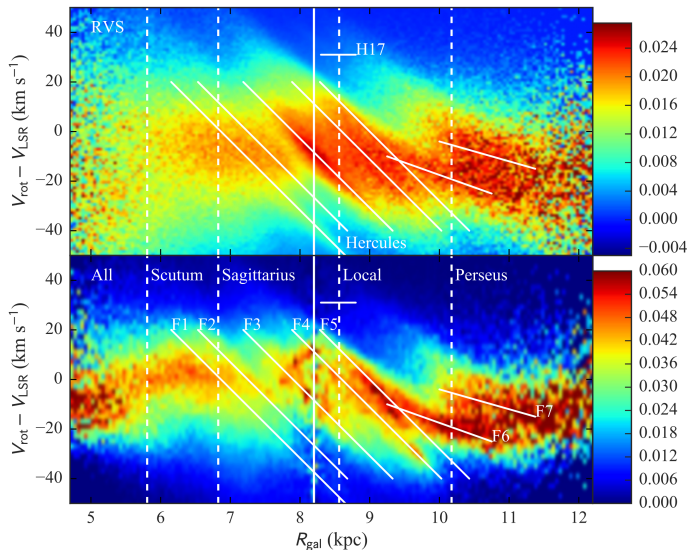
Kuva: P.Kalberla, Uni Bonn

Gaian ansiosta rotaatiokäyrää voidaan tutkia myös OB-spektriluokan tähtien avulla laajalla R -välillä.

Tässä voidaan käyttää pelkästään *Gaia*-dataa, tai yhdistää *Gaian* määäämät parallaksit ja ominaisliikkeet maanpäältä tehtyihin säteisnopeusmittauksiin.

Seuraavan sivun kuva on artikkelista Kawata et al. MNRAS 479, L108 (2018), joka perustuu *Gaia*-arkistoon ja aiempiin spektroskooppisiin mittauksiin.

Kawata et al. MNRAS 479, L108 (2018): Tähtien kiertonopeudet suhteessa Θ_0 :aan välillä $5 < R < 12$ kpc. Ylemmässä kuvassa on läytetty vain *Gaia*n määäämiä säteisnopeuksia. Kuvaan on merkitty spiraalihaarat (pystyviivat) sekä liikkuvia ryhmiä vastaavat häiriöt (diagonaaliset viivat)



Pimeän aineen vaikutus rotaatiokäyrään

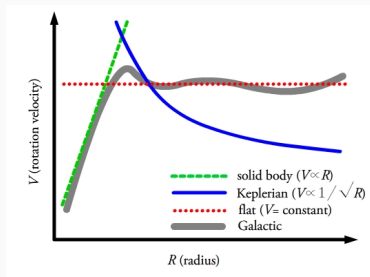
Linnunradan rotaatiokäyrä IV

Jos Linnunradan massa olisi säteen $R = R_0$ sisäpuolella alueessa $R > R_0$ rotaationopeus lähestyisi Keplerin liikkeen muotoa:

$$\Theta(R) = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Linnunradassa etäisyyksillä $8 < R < 16$ kpc havaittu $\Theta(R)$ ei selvästikään ole tätä muotoa!

$\Theta(R) \approx$ vakio tai jopa vähän nouseva



Laakea rotaatiokäyrä: $\Theta^2 = \frac{GM}{R} \Rightarrow M(r) \propto R \Rightarrow \frac{dM(R)}{dR} = \text{vakio}$

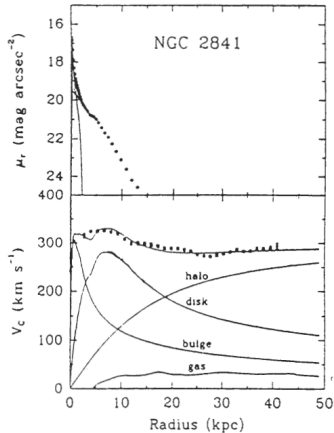
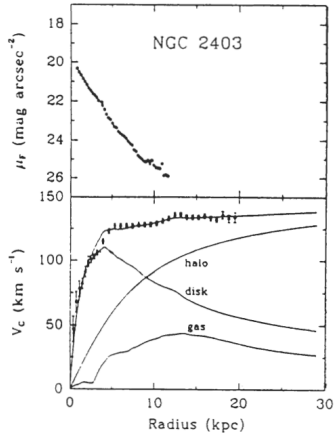
Huom. $M(R) = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr \Rightarrow \frac{dM(R)}{dR} = 4\pi R^2 \rho(R) = \text{vakio} \Rightarrow \rho(R) \propto R^{-2}$ (muistuttaa isotermistä hydrostaattista palloa)

Rotaatiökäyrät muissa galakseissa

Myös muissa Linnunradan kaltaisissa spiraaligalakseissa havaitaan laakea rotaatiökäyrä

Rotaatiökäyrät osoittavat pimeän aineen olemassaolon

Pimeän aineen suhteellinen määrä kasvaa galaksin ulko-osissa



Tähtien liikeyhtälö

Tähtien radoista

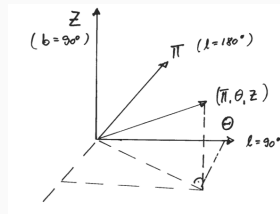
Jokaista tähden FSR-nopeusvektoria (Π, Θ, Z) vastaa tietty tähden rata Linnunradan vetovoimakentässä.

Koska Linnunradassa ei vallitse keskeisvoimakenttä, $F(R) \neq -GM/R^2$, tähden rata ei ole sulkeutuva ellipsi.

$F(R)$ tunnetaan vain likimain (empiirisesti) \rightarrow rataa ei voida laskea kovin tarkasti.

Tarkastelemme seuraavassa tähtien ratojen pieniä poikkeamia ympyräradasta Linnunradan keskuksen ympäri

Tätä varten tarvitsemme nopeuden ja kiihtyvyyden esityksiä sylinterikoordinaatossa.



Paikka, nopeus ja kiihtyvyys (x, y, z) -koordinaatistossa

Suorakulmaisessa koordinaatistossa yksikkövektorit \hat{e}_x , \hat{e}_y , ja \hat{e}_z ovat vakioita.

Paikkavektori \vec{s} :

$$\vec{s} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$$

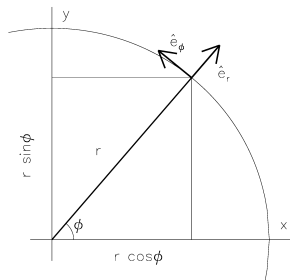
Nopeus, $\dot{\vec{s}}$, ja kiihtyvyys, $\ddot{\vec{s}}$, saadaan paikkavektorista seuraavasti:

$$\dot{\vec{s}} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y + \dot{z}\hat{e}_z \quad ,$$

$$\ddot{\vec{s}} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} = \ddot{x}\hat{e}_x + \ddot{y}\hat{e}_y + \ddot{z}\hat{e}_z$$

Sylinterikoordinaatisto

Pieniä poikkeamia ympyräradoista on paras tarkastella [sylinterikoordinaatistossa](#) (r, ϕ, z) , jossa paikkavektori on $\vec{s} = r \hat{e}_r + z \hat{e}_z$



Näkymä z-akselin suunnasta

Seuraavassa johdetaan paikka, nopeus ja kiihtyvyyshvektorit tässä koordinaatistossa.

Nopeutta ja kiihtyvyyttä varten tarvitaan yksikkövektorien \hat{e}_r ja \hat{e}_ϕ aikaderivaatat.

Tässä käytetään hyväksi näiden yksikkövektorien esityksiä suorakulmisen koordinaatiston yksikkövektorien \hat{e}_x ja \hat{e}_y avulla.

Muunnos (x, y, z) - ja (r, ϕ, z) -koordinaatistojen välillä

Yksikkövektorit $(\hat{e}_r, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z)$ yksikkövektorien $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ avulla saadaan (esim.) kiertämällä koordinaatistoa z -akselin suhteen kulman ϕ verran:

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\phi \\ \hat{e}_z \end{bmatrix} = R_z(\phi) \begin{bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{bmatrix}$$

Siis

$$\begin{cases} \hat{e}_r &= \cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y \\ \hat{e}_\phi &= -\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y \\ \hat{e}_z &= \hat{e}_z \end{cases}$$

Paikka, nopeus ja kiihtyvyys sylinterikoordinaatistossa (I)

Paikkavektori:

$$\vec{s} = r\hat{e}_r + z\hat{e}_z$$

Nopeus ja kiihtyvyys saadaan tästä derivoimalla.

Lasketaan ensin yksikkövektorien \hat{e}_r ja \hat{e}_ϕ aikaderivaatat:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_r &= \frac{d\hat{e}_r}{dt} = -\sin\phi\dot{\phi}\hat{e}_x + \cos\phi\dot{\phi}\hat{e}_y = (-\sin\phi\hat{e}_x + \cos\phi\hat{e}_y)\dot{\phi} = \dot{\phi}\hat{e}_\phi \\ \dot{\hat{e}}_\phi &= \frac{d\hat{e}_\phi}{dt} = -\cos\phi\dot{\phi}\hat{e}_x - \sin\phi\dot{\phi}\hat{e}_y = -(\cos\phi\hat{e}_x + \sin\phi\hat{e}_y)\dot{\phi} = -\dot{\phi}\hat{e}_r\end{aligned}$$

Yksikkövektori \hat{e}_z on vakio, joten $\dot{\hat{e}}_z = 0$.

Paikka, nopeus ja kiihtyvyys sylinterikoordinaatistossa (II)

Nopeus:

$$\vec{s} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z .$$

Kiihtyvyys:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{s}} &= \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z) \\ &= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\hat{e}}_r + \dot{r}\dot{\phi}\hat{e}_\phi + r\ddot{\phi}\hat{e}_\phi + r\dot{\phi}\dot{\hat{e}}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z \\ &= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{r}\dot{\phi}\hat{e}_\phi + r\ddot{\phi}\hat{e}_\phi + r\dot{\phi}(-\dot{\phi}\hat{e}_r) + \ddot{z}\hat{e}_z \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2r\dot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z .\end{aligned}$$

keskeis-

Euler-

Coriolis-kiihtyvyys

Voimakomponentit massayksikköä kohti:

$$\begin{cases} f_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 & (\text{radiaalinen komponentti}) \\ rf_\phi = r(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) = d(r^2\dot{\phi})/dt & (\text{vääntömomentti, 0 jos keskeisvoima}) \\ f_z = \ddot{z} & (z\text{-komponentti}) \end{cases}$$

Tähden liikevakiot:

$$\begin{cases} \text{Energiaintegraali } E_1 = \frac{1}{2}v^2 - \Omega = \frac{1}{2}(\Pi^2 + \Theta^2 + Z^2) - \Omega = \text{vakio} \\ \text{Pintaintegraali } E_2 = r^2\dot{\phi} = \text{vakio} & \text{keskeisvoimakentässä} \end{cases}$$

Pieni poikkeama ympyräliikkeestä

Pieni häiriö radiaalisessa komponentissa I

Oletetaan pieni radiaalinen häiriö ympyräradasta:

$$r = R_0 + \xi \quad , \quad \xi \ll R_0$$

Radiaalinen liikeyhtälö:

$$f_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} \quad ,$$

missä Φ on gravitaatiopotentiaali

Potentiaalin gradientti saadaan ehdosta, että tähdet kiertävät keskimäärin tasaisesti ympyräradalla:

$$\ddot{R}_c = \frac{\Theta_c^2}{R_c} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial R} \right)_{R_c} = 0$$

missä Θ_c ympyräliikkeen nopeus, $\Theta_c(R_0) \equiv \Theta_0$

Pieni häiriö radiaalisessa komponentissa II

Sijoitetaan

$$\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} \approx \frac{\Theta_c^2}{r}$$

ja merkitään

$$\dot{\phi} = \frac{\Theta}{r}$$

Liikkeyhtälöksi tulee

$$\ddot{r} - \frac{\Theta^2}{r} = -\frac{\Theta_c^2(r)}{r}$$

Radiaalisessa liikkeyhtälössä esiintyy kolme termiä.

Lasketaan häirityt versiot näistä käyttäen sijoitusta $r = R_0 + \xi$.

Pieni häiriö radiaalisessa komponentissa III

Sijointus $r = R_0 + \xi$ liikeyhtälöön:

1. termi:

$$\ddot{r} = \ddot{\xi}$$

2. termi: impulssimomentti säilyy: $r^2 \dot{\phi} = r\Theta = R_0\Theta_0 \Rightarrow$

$$\frac{\Theta^2}{r} = \frac{\Theta^2 r^2}{r^3} = \frac{\Theta_0^2 R_0^2}{r^3} = \frac{\Theta_0^2 R_0^2}{R_0^3 (1 + \xi/R_0)^3} \approx \frac{\Theta_0^2}{R_0} \left(1 - 3\frac{\xi}{R_0} + \dots \right)$$

3. termi: $\Theta_C(r) = \Theta_C(R_0) + \left(\frac{d\Theta_C}{dr} \right)_{R_0} \xi + \dots = \Theta_0 - (A + B)\xi + \dots$,

missä A ja B ovat Oortin vakioita \Rightarrow

$$\frac{\Theta_C^2(r)}{r} = \frac{\Theta_0^2 - 2(A + B)\Theta_0\xi + \dots}{R_0(1 + \xi/R_0)} \approx \left\{ \frac{\Theta_0^2}{R_0} - 2(A + B)\frac{\Theta_0\xi}{R_0} \right\} \left(1 - \frac{\xi}{R_0} \right)$$

Pieni häiriö radiaalisessa komponentissa IV

Sijoitetaan nämä 3 termiä liikeyhtälöön $\ddot{r} - \frac{\Theta^2}{r} = -\frac{\Theta_c^2(r)}{r}$

Käyttäen hyväksi yhteyttä $\Theta_0/R_0 = A - B$ sekä pudottamalla ξ^2 -termit saadaan:

$$\ddot{\xi} = 4B(A - B)\xi$$

Tämä on [harmonisen värähtelijän](#) yhtälö $\ddot{\xi} = -\kappa^2\xi$

$$\kappa^2 = -4B(A - B), \kappa = 2\sqrt{-B(A - B)} \approx 36\text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$$

Ratkaisu:

$$\begin{cases} \xi &= H \sin \kappa(t - t_0) & (\text{paikka}) \\ \dot{\xi} &= H\kappa \cos \kappa(t - t_0) & (\text{nopeus}) \end{cases}$$

Valitaan alkuhetkellä ($t = t_0$) $\xi = 0$, $\dot{\xi} = \Pi_0$, ja $t = 0 \Rightarrow$

$$\xi = \frac{\Pi_0}{\kappa} \sin \kappa t, \quad \dot{\xi} = \Pi = \Pi_0 \cos \kappa t$$

Pieni häiriö radiaalisessa komponentissa V

Tähti värähtelee radiaalisessa suunnassa tasapainoasemansa $r = R_0$ molemmin puolin

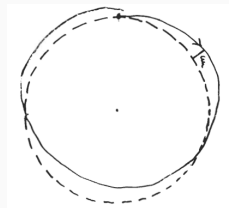
Värähdysliikkeen periodi on

$$P_{r,\text{osc}} = \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{2\pi}{2\sqrt{-B(A-B)}} \approx 170 \times 10^6 \text{ v}$$

Kiertoaika

$$P_{\text{rot}} = \frac{2\pi R_0}{\Theta_0} = \frac{2\pi}{A-B} \approx 230 \times 10^6 \text{ v}$$

$P_{r,\text{osc}}/P_{\text{rot}} = 0.74$ - tähden rata ei ole sulkeutuva käyrä



Huom. Jos $f \propto r^{-2}$,
 $P_{r,\text{osc}} \sim P_{\text{rot}}$ saataisiin
sulkeutuva rata

Mitä opimme?

Viimeaikaiset määrytykset antavat Oortin vakioille seuraavat arvot:

$$A \approx 15 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}, B \approx -12 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}.$$

$$\text{Tästä seuraa } \Omega_0 = A - B \approx 27 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1} \approx 8.8 \times 10^{-16} \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Kiertoaika auringon etäisyydellä } T_0 = 2\pi/\Omega_0 \approx 230 \times 10^6 \text{ v}$$

Auringon etäisyys Linnunradan keskuksesta, R_0 , voidaan johtaa joko tilastollisesti tai määräämällä suoraan etäisyys $\text{Sqr } A^*$:een.

Viime vuosina julkaistujen tutkimusten perusteella $R_0 = 8.1 \pm 0.1 \text{ kpc}$.

$$\text{Ratanopeudeksi saadaan } \Theta_0 \approx 230 \text{ km s}^{-1}$$

Linnunradan globaali rotaatiokäyrä on laakea alueessa $3 \leq R \leq 13 \text{ kpc}$, vaikka näkyvän aineen määrä putoaa jyrkän eksponentiaalisesti. Todiste pimeän aineen olemassaololle Linnunradassa ja myös muissa galakseissa.

Tähtien uskotaan seuraavan likimain ympyrä ratoja. Pienet häiriöt aiheuttavat värähtelyliikettä keskimääräisen radan suhteen. Tästä lisää ensi kerralla.