

2. välikokeen 6.5.2016 ratkaisuehdotukset

1. Standardinormaalijakauman 99.5 persentiili on 2.575829 (`qnorm(0.995)`). Luottamusvälin rajat ovat

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\mu}_1}{n_1} + \frac{\hat{\mu}_2}{n_2}} \\ = 1.94 - 1.73 \pm 2.575829 \sqrt{\frac{1.94}{16216} + \frac{1.73}{4336}} \\ = 0.21 \pm 0.05865996.\end{aligned}$$

Luottamusväli on noin $[0.151, 0.269]$. Väli ei peitä nollaa. Alimman koulutustason naisten luokassa syntyvyys on suurempaa kuin ylimmän koulutustason luokassa.

2–3.

a) Testisuure on

$$\frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1 - \pi_0)/n}}.$$

Siinä $\hat{\pi}$ on havaittu suhteellinen osuus, π_0 on nollahypoteesin mukainen suhteellinen osuus ja n on otoskoko.

Englanti: Testisuure saa arvon

$$\frac{0.569 - 0.5}{\sqrt{0.5(1 - 0.5)/174}} \approx 1.820.$$

Nollahypoteesin pätiessä testisuure noudattaa suurilla havaintomäärillä Standardinormaalijakaumaa. Verrataan testisuureen arvoa siihen. Kaksisuuntaisessa testauksessa riskitasolla 5 % kriittiset pisteet ovat Standardinormaalijakauman 2.5. ja 97.5. persentiilit -1.960 ja 1.960 (`qnorm(0.975)`). Koska 1.820 sijoittuu näiden persentiilien välille, aineisto ei ole ristiriidassa nollahypoteesin kanssa, että Englanti voittaa tai häviää ottelunsa yhtäsuurella todennäköisyydellä, kun riskitaso on 5 %. Nollahypoteesi jää voimaan. R:n käskyllä `2*(1-pnorm(1.820))` testisuureen p -arvoksi saadaan 0.069 .

Ranska: Testisuureen arvo on

$$\frac{0.615 - 0.5}{\sqrt{0.5(1 - 0.5)/200}} \approx 3.253.$$

Kaksisuuntaisessa testauksessa riskitasolla 1 % kriittiset pisteet ovat standardinormaalijakauman 0.5. ja 99.5. persentiilit -2.576 ja 2.576 (`qnorm(0.995)`). Koska testisuureen arvo ei ole kriittisten arvojen välissä, niin nollahypoteesi hylätään. Ranska voittaa ottelunsa 0.5:ttä suuremmalla todennäköisyydellä. Testisuureen p -arvo on noin 0.001 (`2*(1-pnorm(3.253))`).

b) Englanti-testissä havaittu suhteellinen osuus 0.569 poikkeaa nollahypoteesin mukaisesta arvosta 0.5 vähemmän kuin Ranska-testissä, jossa havaittu suhteellinen osuus on 0.615. Ranska-testissä havaintoja on enemmän. Molemmat seikat kasvattavat testisuuren arvoa Ranska-testissä. Englanti-testissä poikkeama ja otoskoko eivät olleet riittävän suuria, jotta kriittinen arvo ylittyisi; Ranska-testissä olivat.

Riskitasojen erot eivät selitä eroa testien tuloksissa. Nollahypoteesi olisi jäänyt voimaan Englanti-testissä, vaikka testin riskitaso olisi ollut Ranska-testin 1 %.

c) Testisuure on

$$\frac{\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_2}{\sqrt{\hat{\pi}(1 - \hat{\pi})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

jossa $\hat{\pi}_1 = 67/102 \approx 0.6568627$ ja $\hat{\pi}_2 = 40/66 \approx 0.6060606$ ovat havaitut osuudet ja $n_1 = 102$ ja $n_2 = 66$ ovat otoskoot. Testisuure noudattaa nollahypoteesin pätiessä Standardinormaalijakaumaa suurilla havaintomäärillä.

Voittojen osuus yhdistetyssä aineistossa on

$$\hat{\pi} = \frac{n_1\hat{\pi}_1 + n_2\hat{\pi}_2}{n_1 + n_2} = \frac{102 \times 0.6568627 + 66 \times 0.6060606}{102 + 66} = \frac{67 + 40}{168} \approx 0.6369048.$$

Testisuureen arvo on

$$\frac{0.6568627 - 0.6060606}{\sqrt{0.6369048 \times 0.3630952 \times \left(\frac{1}{102} + \frac{1}{66}\right)}} \approx 0.669.$$

Kriittinen arvo yksisuuntaisessa testauksessa 2.5 %:n riskitasolla on 1.960 (`qnorm(0.975)`). Testisuureen arvo ei ylitä kriittistä arvoa. Aineisto ei ole 2.5 %:n riskitasolla — eikä millään mielekkäällä riskitasolla — ristiriidassa nollahypoteesin kanssa, että Ranskan joukkue voittaa samalla todennäköisyydellä koti- ja vieraskentällä. Nollahypoteesia ei hylätä. Käskyllä `1-pnorm(0.669)` saadaan testisuureen p -arvoksi noin 0.252.

d) Suhteellisten osuuksien vertailutestissä oletetaan, että havainnot vertailtavissa ryhmissä ovat riippumattomia. Havainnot eivät ilmeisesti ole riippumattomia, jos verrataan Englannin ja Ranskan joukkueiden havaittuja voitto-osuuksia: Taulukon otteluissa lienee mukana useita, joissa vastapareina ovat olleet Ranska ja Englanti. Näihin liittyvät havainnot eivät olisi riippumattomia, sillä toisen voitto merkitsisi aina toisen häviötä. Suhteellisten osuuksien vertailutestien oletukset eivät tällöin pätsisi.

Ylimääräistä kommentointia: Mts:lla 1537 todetaan taulukosta:

— the win rate for France is statistically higher than that recorded for England on the basis of a z-score ($|z| = 2.69$ and p -value = 0.007).

Miten tämä on laskettu, askarruttaa. Osuuksien vertailutestisuureen itseisarvo kaikkien otteiden voitto-osuuksista laskettuna on noin $0.904 \neq 2.69$. Lisäksi testiin liittyisi edellä todettu ongelma havaintojen riippuvuudesta.

4.

a) Onnellisimmilta vaikuttavat yhden seksikumppanin omaavat. Suhteessa muihin ryhmiin heistä suurin osa (36.03 %) kuuluu onnellisimpiin ja pienin osa (7.95 %) vähiten onnellisiin

Onnettomimmilta vaikuttavat monia seksikumppaneita omanneet. Suhteessa muihin ryhmiin heistä kuuluu pienin osa (18.27 %) onnellisimpiin ja onnettomimpiin oleellisesti sama osuus kuin ei lainkaan seksikumppaneita omaavista (18.27 % *vs.* 18.82 %).

b) Luokitteluaineistossa riippumattomuutta voidaan testata χ^2 -testillä. Taulukot havaituista ja odotetuista solufrekvensseistä ovat alla:

| seksikumppanien lkm | onnellisuus | | | Σ (lkm) |
|---------------------|-------------|-------|-------|----------------|
| | ei kovin | melko | hyvin | |
| 0 | 112 | 329 | 154 | 595 |
| 1 | 118 | 832 | 535 | 1485 |
| ≥ 2 | 57 | 198 | 57 | 312 |
| Σ | 287 | 1359 | 746 | 2392 |

| seksikumppanien lkm | onnellisuus | | | Σ (lkm) |
|---------------------|-------------|--------|--------|----------------|
| | ei kovin | melko | hyvin | |
| 0 | 71.39 | 338.05 | 185.56 | 595 |
| 1 | 178.18 | 843.69 | 463.13 | 1485 |
| ≥ 2 | 37.43 | 177.26 | 97.30 | 312 |
| Σ | 287 | 1359 | 746 | 2392 |

Estimoidut odotetut frekvenssit e_{ij} on laskettu kaavalla

$$e_{ij} = n \frac{n_{i+}}{n} \frac{n_{+j}}{n} = \frac{n_{i+} n_{+j}}{n},$$

jossa n_{i+} on i . rivifrekvenssi, n_{+j} on j . sarakefrekvenssi ja n on havaintojen kokonaismäärä. Esimerkiksi $e_{11} = 595 \times 287/2392 \approx 71.39$.

Testisuure on

$$X^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \approx \frac{(112 - 71.39)^2}{71.39} + \dots + \frac{(57 - 97.30)^2}{97.30} \approx 89.70.$$

n_{ij} on havaittu frekvenssi. Nollahypoteesin pätiessä testisuure noudattaa asympotoottisesti $\chi^2(3-1)(3-1)$ - eli $\chi^2(4)$ -jakaumaa. Sen kriittinen arvo 1 %:n riskitasolla on 13.277 (`qchisq(0.99,4)`). Nollahypoteesi hylätään 1 %:n riskitasolla (ja 0.1 %:n riskitasolla, jolla kriittinen arvo on 18.467). Testisuureen p -arvo on R:n raportointitarkkuudella 0 (`1-pchisq(89.70,4)`). Onnellisuus ja seksikumppanien lukumäärä vuoden aikana eivät ole riippumattomia muuttujia.