TILASTOTIETEEN JATKOKURSSI. 5+5 OP. 21.1.–6.5.2016. Luennoi yliopistonlehtori Pekka Pere.

1. välikokeen 11.3.2016 ratkaisuehdotukset

1.

a) Vasemmanpuoleisessa Venn-diagrammissa alla A ja B ovat riippumattomia tapahtumia, $\mathsf{P}(A \cap B) = 0.2$ ja $\mathsf{P}(A \mid B) = 0.4$.

Perustelu: Otosavaruus (S) on neliö, jonka sivut ovat yksikön pituiset. Tapahtumaa A kuvaavan osajoukon pinta-ala eli todennäköisyys on $0.4 \times 1 = 0.4$. Tapahtuman B todennäköisyys on vastaavasti $0.5 \times 1 = 0.5$.

Tapahtuman $A \cap B$ todennäköisyys on

$$\mathsf{P}(A \cap B) = 0.4 \times 0.5 = 0.2$$

kuten tehtävässä ohjeistettiin. Tapahtuman $A \mid B$ todennäköisyys on

$$\mathsf{P}(A \mid B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4,$$

mikä vaatimus tehtävässä asetettiin.

Tapahtuman $B \mid A$ todennäköisyys on

$$\mathsf{P}(B \mid A) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5.$$

Tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, koska niiden ehdollistamattomat ja ehdollistetut todennäköisyydet ovat samat:

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A \mid B) = 0.4$$

ja

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(B \mid A) = 0.5.$$

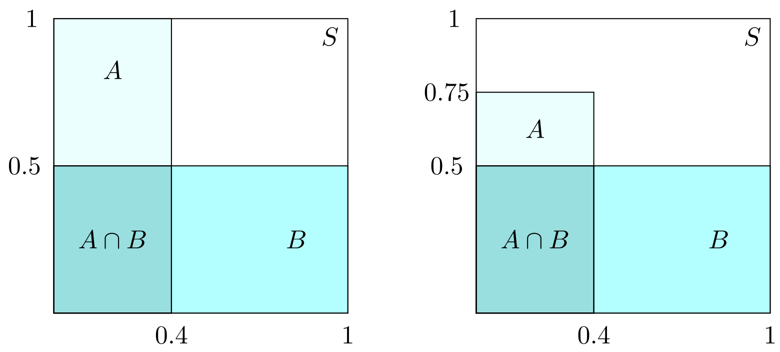
b) Mikäli kohdan a) Venn-diagrammissa tapahtumaa A kuvaava osajoukko ei yllä otosavaruuden yläreunaan, niin ehdollistamattomat ja ehdollistetut todennäköisyydet eivät ole enää samoja eivätkä tapahtumat riippumattomia. Esimerkiksi olkoon A:n todennäköisyys $0.4 \times 0.75 = 0.3$. Oikeanpuoleinen Venn-diagrammi alla havainnollistaa. Tällöin

$$\mathsf{P}(A \mid B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4 \neq 0.3 = \mathsf{P}(A)$$

ja

$$\mathsf{P}(B \mid A) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{0.2}{0.3} = 0.666\ldots \neq 0.5 = \mathsf{P}(B).$$

Koska tapahtumien ehdollistamattomat ja ehdollistetut todennäköisyydet ovat erisuuria, tapahtumat eivät ole riippumattomia.



2.

a) Kahden nopan heiton otosavaruus on kaikkien silmälukuparien joukko:

$$S = \{(1,1),\ (1,2),\ ...,\ (1,6), (2,1),\ ..., (2,6), (3,1)\ ...(3,6), ..., (6,1),\ ...,\ (6,6)\}.$$

Se koostuu siis alkioista

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	**(1,6)**
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	**(2,6)**
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	**(3,6)**
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	**(4,6)**
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	**(5,6)**
(6,1)	**(6,2)**	**(6,3)**	**(6,4)**	**(6,5)**	**(6,6)**

b) Kaikki silmälukuparit ovat yhtätodennäköisiä (1/36). Silmälukupareissa $(1,6), \ldots, (5,6)$, $(6,1), \ldots, (6,5)$ ja $6,6$ (11 silmälukuparia) toinen silmäluku on 6. Yhdessä silmälukuparissa molemmat silmäluvut ovat 6. (Lihavoidut silmälukuparit.)

Merkitään A:lla tapahtumaa, että molemmat silmäluvut ovat 6 ja B:llä tapahtumaa, että ainakin toinen silmäluku on 6. Ehdollisen todennäköisyyden määritelmästä saadaan kysytyksi todennäköisyydeksi $1/11$:

$$\mathsf{P}(A \mid B) = \frac{1/36}{11/36} = \frac{1}{11}.$$

Ylimääräistä kommentointia. Todennäköisyys ei ole $1/6$. Se johtuu siitä, että kysymyksessä ei todettu, että nimenomaisesti toisen nopan silmäluku olisi 6. Kysymys, ratkaisu ja vastaus ovat samantapainen kuvio kuin sisarusparadoksissa tai Galtonin kysymyksessä kolmen lantin heitosta.[1]

[1]S. Lehto ja T. Sottinen (2005): Sisarusongelma — paradoksi ehdollisesta todennäköisyydestä. *Solmu* 1/2005. S. Marks ja G. Smith (2011): The Two-Child Paradox Reborn? *Chance*, 24, 54–59. F. Galton (1894): A Plausible Paradox in Chances. *Nature*, 49, 365–366.

3. Merkitään A:lla tapahtumaa "kolme kruunaa" ja B:llä tapahtumaa "lantti harhaton". Riippumattomuuden perusteella

$$\mathsf{P}(A \mid B) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0.125$$

ja

$$\mathsf{P}(A \mid B^C) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} = 0.421875.$$

Käytetään Bayesin kaavaa:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(B \mid A) &= \frac{\mathsf{P}(A \mid B)\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(A \mid B)\mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(A \mid B^C)\mathsf{P}(B^C)} \\
&= \frac{(1/2)^3 \times 1/2}{(1/2)^3 \times 1/2 + (3/4)^3 \times 1/2} \\
&\approx 0.229.
\end{aligned}$$

Todennäköisyys, että heitetty lantti on harhaton, on noin 0.229.

4.

a) Vastaus saadaan Binomijakaumasta:

$$\begin{aligned}
\binom{14}{1} \times 0.8^1 \times (0.2)^{13} &= \frac{14!}{1! \times 13!} \times 0.8 \times 0.2^{13} \\
&\approx 14 \times 0.8 \times 0.0000000008192 \\
&\approx 0.00000000917504.
\end{aligned}$$

R-komento `dbinom(1,14,0.8)` tuottaa saman todennäköisyyden.

b)

$$\binom{14}{0} \times 0.8^0 \times 0.2^{14} = 0.2^{14} \approx 0.00000000016384.$$

R:n käsky `dbinom(0,14,0.8)` laskee saman todennäköisyyden.

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned}
&\binom{14}{0} \times 0.8^0 \times 0.2^{14} + \binom{14}{1} \times 0.8^1 \times (0.2)^{13} \\
&\approx 0.00000000917504 + 0.00000000016384 \\
&= 0.00000000933888.
\end{aligned}$$

Se voidaan laskea myös R-komennolla `pbinom(1,14,0.8)`.