

## Tilastollinen päättely

### 1. kurssikoe 11.12.2012

Tentissä saa olla mukana kirjoitusvälineet ja laskin.

1. Tarkastellaan tilastollista mallia  $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \theta)$ , jossa  $\theta$  on tuntematon reaaliarvoinen parametri. Määrittele ja selitä seuraavat käsitteet:

- (a) Havaittu informaatio.
- (b) Estimaattorin tehokkuus.

2. Oletetaan, että havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat  $Y_1, \dots, Y_n$  ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \theta) = \begin{cases} \theta(1+y)^{-(1+\theta)}, & \text{kun } y > 0 \\ 0, & \text{kun } y \leq 0 \end{cases}$$

jossa  $\theta > 0$ . Hae parametrin  $\theta$  suurimman uskottavuuden estimaattori  $\hat{\theta}$ . Perustele ratkaisu huolellisesti.

3. Oletetaan, että havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat  $Y_1, \dots, Y_n$  ovat riippumattomia ja noudattavat kukin gammajakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \theta) = \theta^{-2} y \exp(-y/\theta), \quad y > 0,$$

jossa  $\theta$  on positiivinen parametri. Osoita, että mille tahansa parametrin  $\theta$  harhattomalle estimaattorille  $T$  on voimassa

$$\text{var}(T) \geq \theta^2/2n.$$

Esitä parametrin  $\theta$  momenttiestimaattori ja perustele miksi se on tai ei ole hyvä estimaattori tässä tapauksessa.

4. Erään elektronisen komponentin kesto aika noudattaa eksponenttijakaumaa odotusarvona  $\mu$ . Tutkittaessa  $n$  komponenttia toisistaan riippumatta saatiin niiden kestoajoiksi  $y_1, \dots, y_n$  aikayksikköä. Johda huolellisesti perustellen suurimman uskottavuuden estimaatti todennäköisyydelle, että umpimähkään valitun komponentin kestoikä on vähintään  $y_0$  aikayksikköä eli parametrille  $\theta = g(\mu) = P(Y \geq y_0)$ .

## Muistin tueksi

- Jos satunnaismuuttuja  $Y$  noudattaa eksponenttijakaumaa parametrina  $\lambda$  (eli  $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ ), niin sen tiheysfunktio on  $f(y; \lambda) = \lambda e^{-\lambda y}$  ja kertymäfunktio on  $F(y; \lambda) = 1 - e^{-\lambda y}$ ,  $y > 0$ . Lisäksi  $E(Y) = 1/\lambda$  ja  $\text{var}(Y) = 1/\lambda^2$ .
- Satunnaismuuttuja  $X$  noudattaa gammajakaumaa parametrein  $\kappa$  ja  $\lambda$ , jos sen tiheysfunktio on muotoa

$$f_X(x; \kappa, \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} y^{\kappa-1} e^{-\lambda y}, & \text{kun } x > 0, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin merkitään  $X \sim G(\kappa, \lambda)$ , jossa  $\kappa > 0$  ja  $\lambda > 0$ . Gammajakauman odotusarvo on  $\kappa/\lambda$  ja varianssi  $\kappa/\lambda^2$ . Kun  $X_1, \dots, X_k \perp\!\!\!\perp$  ja  $X_i \sim G(\kappa_i, \lambda)$ , niin  $\sum_{i=1}^k X_i \sim G(\sum_{i=1}^k \kappa_i, \lambda)$ .

- Gamma-funktion  $\Gamma(x)$  ominaisuuksia:

(a)

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0.$$

(b)

$$\Gamma(n) = \prod_{i=1}^{n-1} i = (n-1)!, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$