STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Differenssiyhtälöiden ratkaisuista

p. asteen lineaarisen differenssiyhtälön

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t, \quad t = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

ratkaisu on funktio t:stä ja w_j-termeistä, joka sijoitettuna y_i:den paikalle yhtälöön (1) toteuttaa sen kaikilla t:n arvoilla.

Lineaarisen differenssiyhtälön yleinen ratkaisu löytyy näin:

1. Muodostetaan homogeeninen yhtälö (homogenous equation) ja sen p ratkaisua.
2. Haetaan erityisratkaisu (particular solution).
3. Muodostetaan yleinen ratkaisu erityisratkaisun ja homogeenisten ratkaisujen lineaarikombinaation summana.
4. Selvitetään ratkaisun kertoimet yhtälön alkuarvojen avulla.

(Esim. W. Enders (1995): *Applied Econometric Time Series*, s. 17.)

Johdetaan yleinen ratkaisu 2. asteen differenssiyhtälölle, kun lauseen 1.1 karakteristisen yhtälön [1.2.16] juuret λ_i ($p = 2$, $i = 1, 2$) ovat reaalisia ja erisuuria. Samalla selvitetään yllä mainitut käsitteet.

2. asteen lineaarinen differenssiyhtälö on

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + w_t, \tag{2}$$

jossa $\phi_2 \neq 0$.

1. Tutkitaan siihen liittyvää *homogeenistä yhtälöä*

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} = 0. \tag{3}$$

   Osoitetaan, että yksi sen ratkaisu on muotoa $a\lambda^t$ $(a \neq 0, \lambda \neq 0)$[1]. Sijoitetaan yhtälöön (3) $y_t = a\lambda^t$, $y_{t-1} = a\lambda^{t-1}$ ja $y_{t-2} = a\lambda^{t-2}$:

$$\begin{aligned} a\lambda^t &= \phi_1 a\lambda^{t-1} + \phi_2 a\lambda^{t-2} && \Leftrightarrow \\ a\lambda^t - \phi_1 a\lambda^{t-1} - \phi_2 a\lambda^{t-2} &= 0 && \Leftrightarrow \\ \lambda^2 - \phi_1\lambda - \phi_2 &= 0. \end{aligned}$$

[1] Ratkaisu $y_t = 0$ $(= a\lambda^t|_{a=0})$ on niin sanottu *triviaali ratkaisu*.

Saatiin lauseen 1.1 karakteristinen yhtälö! Yhtälö pätee, kun λ:n paikalle sijoitetaan karakteristisen yhtälön juuri. Juuret ovat λ_1,λ_2 = $[\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}]/2$. Differenssiyhtälön (2) ratkaisuja ovat siis $a\lambda_1^t = a[(\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2})/2]^t$ ja $a\lambda_2^t = a[(\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_{2p}})/2]^t$.[2] Ratkaisut ovat stabiileja tai epästabiileja riippuen siitä, ovatko λ_i:t itseisarvoltaan suurempia vai pienempiä kuin yksi. Kirjan analyysin perusteella impulssivasteiden stabiilisuus riippuu täsmälleen samasta ehdosta. Homogeenisen differenssiyhtälön ratkaisu ja kirjassa käsitellyt impulssivasteet ovat siis molemmat yhtäaikaa joko stabiileja tai epästabiileja; toinen ei voi olla stabiili, kun toinen on epästabiili. Alla oletetaan, että differenssiyhtälö on stabiili. Kertoimen a arvolla ei yllä ole merkitystä — yhtälailla ratkaisuja olisivat $a_1\lambda_1^t$ ja $a_2\lambda_2^t$, jossa $a_1 \neq a_2 \neq a$. Vielä yleisempi tulos voidaan osoittaa yllä olevalla tavalla sijoittamalla (kokeile!): Yllä johdettujen kahden ratkaisun lineaarikombinaatio

$$y_t = a_1\lambda_1^t + a_2\lambda_2^t$$

on myös homogeenisen differenssiyhtälön (2) ratkaisu. Tähän tulokseen viitattiin kohdassa 3.

2. Differenssiyhtälölle (2) löydettiin erityisratkaisu yhtälössä [1.2.44]

$$y_t = w_t + \psi_1 w_{t-1} + \psi_2 w_{t-2} + \cdots.$$

Siinä $\psi_j = c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j$ yhtälön [1.2.29] perusteella ja c_1 ja c_2 on määritelty yhtälössä [1.2.25]. (Jos differenssiyhtälössä (2) olisi vakio, niin myös erityisratkaisussa olisi vakio. Ks. esim. Endersin mt. Vrt. odotusarvolaskut s:lla 57.)

3. Yleinen ratkaisu on

$$y_t = a_1\lambda_1^t + a_2\lambda_2^t + w_t + \psi_1 w_{t-1} + \psi_2 w_{t-2} + \cdots$$

(Tällaista ratkaisua tutkittiin 1. asteen differenssiyhtälön tilanteessa kaavassa [2.2.10].)

4. Alkuarvot määräävät a_1:n ja a_2:n suuruuden. Esim. jos $y_0 = 1$ niin pitää päteä

$$\begin{aligned} 1 &= a_1\lambda_1^0 + a_2\lambda_2^0 \\ &= a_1 + a_2 \end{aligned}$$

[2] Jos juuret ovat yhtäsuuria ($\phi_1^2 = -4\phi_2$, jolloin $\lambda_1 = \lambda_2$), niin ratkaisu on $y_t = a_3\lambda_1^t + a_4 t\lambda_1^t$. Kompleksisiset juuret ($\phi_1^2 < 4\phi_2$) ovat erikoistapaus yo. yleisestä ratkaisusta. Tällöin ratkaisu on muotoa $y_t = a_1\lambda_1^t + a_2\lambda_2^t = R^t[a_5\cos(\theta t) + a_6\sin(\theta t)]$ (jossa $R = \sqrt{\phi_2}$ ja θ toteuttaa yhtälön $\cos\theta = \phi_1/(2\sqrt{\phi_2})$. Ratkaisuja käsitellään tarkemmin esimerkiksi kirjassa Chiang, A. (1983): *Fundamental Methods of Mathematical Economics* (s. 578–581).

eli $a_2 = 1 - a_1$. Toinen alkuarvo (y_1) määräisi yksikäsitteisesti a_1:n ja a_2:n:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 \\ &\overset{a_2=1-a_1}{=} a_1\lambda_1 + (1-a_1)\lambda_2 \quad <=> \\ a_1 &= \frac{y_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{aligned}$$

Kaavan [3.5.6] mukaan ARMA$(p.q)$-prosessin autokorrelaatiot ρ_j noudattavat AR-polynomia vastaavaa homogeenistä differenssiyhtälöä alkuarvolla $\rho_0 = 1$, kun $j > q$. Yllä olevien kaavojen avulla voidaan autokorrelaatiot laskea, kun AR-kertoimet tunnetaan. Alkuarvot eli ensimmäisten autokorrelaatioiden suuruus vaikuttaa p. asteen differenssiyhtälön homogeenisen yhtälön ratkaisun (ilmeisin merkinnöin)

$$y_t = a_1\lambda_1^t + \cdots + a_p\lambda_p^t$$

kertoimiin a_i. Sen takia AR(p)-prosessin autokorrelaatiofunktioiden differenssiyhtälön ratkaisussa [3.4.38] on ylipäänsä eri kertoimet kuin ARMA(p, q)-prosessin vastaavassa ratkaisussa [3.5.6]