STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Ositettujen eli lohkottujen matriisien yhteen- ja kertolasku ja transponointi

Ositetaan matriisi $\mathbf{A}$ $(m \times n)$ alimatriiseihin $\mathbf{A}_{ij}$ $(m_i \times n_j,\ i = 1, \ldots, q$ ja $j = 1, \ldots, p)$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{q1} & \cdots & \mathbf{A}_{qp} \end{bmatrix}.$$

Yllä $\sum_{i=1}^{q} m_i = m$ ja $\sum_{j=1}^{p} n_j = n$. Osoitetaan, että ositettujen matriisien yhteenlasku-, transponointi- ja kertolaskusäännöt ovat hyvin samanlaiset kuin osittamattomien matriisien vastaavat säännöt.

a) Olkoon matriisi $\mathbf{B}$ myös dimensioltaan $m \times n$ ja ositettu vastaaviin alimatriiseihin $\mathbf{B}_{ij}$. Tällöin

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1p} + \mathbf{B}_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{q1} + \mathbf{B}_{q1} & \cdots & \mathbf{A}_{qp} + \mathbf{B}_{qp} \end{bmatrix}$$

ja

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}' & \cdots & \mathbf{A}_{q1}' \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{1p}' & \cdots & \mathbf{A}_{qp}' \end{bmatrix}.$$

b) Olkoon matriisi $\mathbf{B}$ $(n \times r)$ ositettu alimatriiseihin $\mathbf{B}_{ij}$ $(n_i \times r_j,\ \sum_{j=1}^{s} r_j = r)$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_{p1} & \cdots & \mathbf{B}_{ps} \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_{1k}\mathbf{B}_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_{1k}\mathbf{B}_{ks} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_{qk}\mathbf{B}_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_{qk}\mathbf{B}_{ks} \end{bmatrix}.$$

Todistetaan edelliset väitteet.[1] Tehtävänannon mukaan matriisi $\mathbf{A}$ $(m\times n)$ voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{q1} & \cdots & \mathbf{A}_{qp} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}
[\mathbf{A}_{11}]_{11} & & [\mathbf{A}_{11}]_{1n_1} & \cdots & [\mathbf{A}_{1p}]_{11} & \cdots & [\mathbf{A}_{1p}]_{1n_p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
[\mathbf{A}_{11}]_{m_1 1} & & [\mathbf{A}_{11}]_{m_1 n_1} & \cdots & [\mathbf{A}_{1p}]_{m_1 1} & \cdots & [\mathbf{A}_{1p}]_{m_1 n_p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
[\mathbf{A}_{q1}]_{11} & \cdots & [\mathbf{A}_{q1}]_{1n_1} & \cdots & [\mathbf{A}_{qp}]_{11} & \cdots & [\mathbf{A}_{qp}]_{1n_p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
[\mathbf{A}_{q1}]_{m_q 1} & \cdots & [\mathbf{A}_{q1}]_{m_q n_1} & \cdots & [\mathbf{A}_{qp}]_{m_q 1} & \cdots & [\mathbf{A}_{qp}]_{m_q n_p}
\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

a) Koska matriisi $\mathbf{B}$ $(m \times n)$ on ositettu kuten $\mathbf{A}$, pätee

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}+\mathbf{B} &= \begin{bmatrix}
[\mathbf{A}_{11}]_{11} & & [\mathbf{A}_{11}]_{1n_1} & \cdots & [\mathbf{A}_{1p}]_{11} & \cdots & [\mathbf{A}_{1p}]_{1n_p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
[\mathbf{A}_{11}]_{m_1 1} & & [\mathbf{A}_{11}]_{m_1 n_1} & \cdots & [\mathbf{A}_{1p}]_{m_1 1} & \cdots & [\mathbf{A}_{1p}]_{m_1 n_p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
[\mathbf{A}_{q1}]_{11} & \cdots & [\mathbf{A}_{q1}]_{1n_1} & \cdots & [\mathbf{A}_{qp}]_{11} & \cdots & [\mathbf{A}_{qp}]_{1n_p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
[\mathbf{A}_{q1}]_{m_q 1} & \cdots & [\mathbf{A}_{q1}]_{m_q n_1} & \cdots & [\mathbf{A}_{qp}]_{m_q 1} & \cdots & [\mathbf{A}_{qp}]_{m_q n_p}
\end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix}
[\mathbf{B}_{11}]_{11} & & [\mathbf{B}_{11}]_{1n_1} & \cdots & [\mathbf{B}_{1p}]_{11} & \cdots & [\mathbf{B}_{1p}]_{1n_p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
[\mathbf{B}_{11}]_{m_1 1} & & [\mathbf{B}_{11}]_{m_1 n_1} & \cdots & [\mathbf{B}_{1p}]_{m_1 1} & \cdots & [\mathbf{B}_{1p}]_{m_1 n_p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
[\mathbf{B}_{q1}]_{11} & \cdots & [\mathbf{B}_{q1}]_{1n_1} & \cdots & [\mathbf{B}_{qp}]_{11} & \cdots & [\mathbf{B}_{qp}]_{1n_p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
[\mathbf{B}_{q1}]_{m_q 1} & \cdots & [\mathbf{B}_{q1}]_{m_q n_1} & \cdots & [\mathbf{B}_{qp}]_{m_q 1} & \cdots & [\mathbf{B}_{qp}]_{m_q n_p}
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

[1] Vastaus on oleellisesti Jarkko Miettisen laatima.

$$
= \left[\begin{array}{ccc}
[\mathbf{A}_{11}]_{11}+[\mathbf{B}_{11}]_{11} & & [\mathbf{A}_{11}]_{1n_1}+[\mathbf{B}_{11}]_{1n_1} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \\
[\mathbf{A}_{11}]_{m_11}+[\mathbf{B}_{11}]_{m_11} & & [\mathbf{A}_{11}]_{m_1n_1}+[\mathbf{B}_{11}]_{m_1n_1} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \\
[\mathbf{A}_{q1}]_{11}+[\mathbf{B}_{q1}]_{11} & \cdots & [\mathbf{A}_{q1}]_{1n_1}+[\mathbf{B}_{q1}]_{1n_1} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \\
[\mathbf{A}_{q1}]_{m_q1}+[\mathbf{B}_{q1}]_{m_q1} & \cdots & [\mathbf{A}_{q1}]_{m_qn_1}+[\mathbf{B}_{q1}]_{m_qn_1} & \cdots
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{ccc}
[\mathbf{A}_{1p}]_{11}+[\mathbf{B}_{1p}]_{11} & \cdots & [\mathbf{A}_{1p}]_{1n_p}+[\mathbf{B}_{1p}]_{1n_p} \\
\vdots & & \vdots \\
[\mathbf{A}_{1p}]_{m_11}+[\mathbf{B}_{1p}]_{m_11} & \cdots & [\mathbf{A}_{1p}]_{m_1n_p}+[\mathbf{B}_{1p}]_{m_1n_p} \\
\vdots & & \vdots \\
[\mathbf{A}_{qp}]_{11}+[\mathbf{B}_{qp}]_{11} & \cdots & [\mathbf{A}_{qp}]_{1n_p}+[\mathbf{B}_{qp}]_{1n_p} \\
\vdots & & \vdots \\
[\mathbf{A}_{qp}]_{m_q1}+[\mathbf{B}_{qp}]_{m_q1} & \cdots & [\mathbf{A}_{qp}]_{m_qn_p}+[\mathbf{B}_{qp}]_{m_qn_p}
\end{array}\right]
$$

$$
= \left[\begin{array}{ccc}
\mathbf{A}_{11}+\mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1p}+\mathbf{B}_{1p} \\
\vdots & & \vdots \\
\mathbf{A}_{q1}+\mathbf{B}_{q1} & \cdots & \mathbf{A}_{qp}+\mathbf{B}_{qp}
\end{array}\right].
$$

Käyttämällä transpoosin määritelmää nähdään, että

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}' &= \left[\begin{array}{ccccccc}
[\mathbf{A}_{11}]_{11} & & [\mathbf{A}_{11}]_{1n_1} & \cdots & [\mathbf{A}_{1p}]_{11} & \cdots & [\mathbf{A}_{1p}]_{1n_p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
[\mathbf{A}_{11}]_{m_11} & & [\mathbf{A}_{11}]_{m_1n_1} & \cdots & [\mathbf{A}_{1p}]_{m_11} & \cdots & [\mathbf{A}_{1p}]_{m_1n_p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
[\mathbf{A}_{q1}]_{11} & \cdots & [\mathbf{A}_{q1}]_{1n_1} & \cdots & [\mathbf{A}_{qp}]_{11} & \cdots & [\mathbf{A}_{qp}]_{1n_p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
[\mathbf{A}_{q1}]_{m_q1} & \cdots & [\mathbf{A}_{q1}]_{m_qn_1} & \cdots & [\mathbf{A}_{qp}]_{m_q1} & \cdots & [\mathbf{A}_{qp}]_{m_qn_p}
\end{array}\right]' \\
&= \left[\begin{array}{ccccccc}
[\mathbf{A}_{11}]_{11} & & [\mathbf{A}_{11}]_{m_11} & \cdots & [\mathbf{A}_{q1}]_{11} & \cdots & [\mathbf{A}_{q1}]_{m_q1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
[\mathbf{A}_{11}]_{1n_1} & & [\mathbf{A}_{11}]_{m_1n_1} & \cdots & [\mathbf{A}_{q1}]_{1n_1} & \cdots & [\mathbf{A}_{q1}]_{m_qn_1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
[\mathbf{A}_{1p}]_{11} & \cdots & [\mathbf{A}_{1p}]_{m_11} & \cdots & [\mathbf{A}_{qp}]_{11} & \cdots & [\mathbf{A}_{qp}]_{m_q1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
[\mathbf{A}_{1p}]_{1n_p} & \cdots & [\mathbf{A}_{1p}]_{m_1n_p} & \cdots & [\mathbf{A}_{qp}]_{1n_p} & \cdots & [\mathbf{A}_{qp}]_{m_qn_p}
\end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc}
\mathbf{A}'_{11} & \cdots & \mathbf{A}'_{q1} \\
\vdots & & \vdots \\
\mathbf{A}'_{1p} & \cdots & \mathbf{A}'_{qp}
\end{array}\right].
\end{aligned}
$$

b) **AB** on $m \times r$ -matriisi. Merkitään matriisien **A** ja **B** i, j-elementtejä $[A]_{ij}$:llä ja $[B]_{lj}$:llä. Tarkastellaan matriisin **AB** dimensioltaan $m_1 \times r_1$ olevan "luoteiskulman"i, j-elementtiä ($1 \leq i \leq m_1$ ja $1 \leq j \leq r_1$). Johto alla alkaa matriisin **AB** mielivaltaisen i, j-elementin tarkastelulla ja siirtyy kolmannella rivillä koskemaan matriisin "luoteiskulmaa":

$$\begin{aligned}
[\mathbf{AB}]_{ij} &= \textstyle\sum_{l=1}^{n} [A]_{il}[B]_{lj} \\
&= \textstyle\sum_{l=1}^{n_1} [A]_{il}[B]_{lj} + \sum_{l=n_1+1}^{n_1+n_2} [A]_{il}[B]_{lj} + ... + \sum_{l=n-n_p+1}^{n} [A]_{il}[B]_{lj} \\
&\overset{\text{luoteiskulma}}{=} [\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11}]_{ij} + [\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21}]_{ij} + ... + [\mathbf{A}_{1p}\mathbf{B}_{p1}]_{ij} \\
&= \left[\textstyle\sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_{1k}\mathbf{B}_{k1}\right]_{ij}.
\end{aligned}$$

Matriisin **AB** luoteiskulman i, j-elementti on siten $\sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}$ tehtävänannon mukaisesti. Vastaava todistus pätee kaikille muillekin i, j-elementeille ($m_{s-1} \leq i \leq m_s$ ja $r_{t-1} \leq j \leq r_t$, $s = 1, \ldots, q$, $t = 1, \ldots, p$ ja $m_0 \equiv r_0 \equiv 1$).

STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

R,S-sääntö

Merkitään $m \times n$ -matriisin $\mathbf{A}$ i:nnettä riviä $\mathbf{a}_i^{'}$:lla $(1 \times n)$ ja j:nnettä saraketta $\mathbf{a}_{(j)}$:llä $(m \times 1)$, eli

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{'} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^{'} \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{a}_{(1)} \cdots \mathbf{a}_{(n)}]. \end{aligned}$$

Todista *r,s-sääntö* eli väitteet alla.

a) Matriisin $\mathbf{A}$ kertominen vasemmalta $m \times m$ -diagonaalimatriisilla $\mathbf{D}_v = \lceil d_1 \ldots d_m \rfloor$ tuottaa matriisin, jonka *i. rivi* on kerrottu d_i:llä:

$$\mathbf{D}_v \mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1 \mathbf{a}_1^{'} \\ \vdots \\ d_m \mathbf{a}_m^{'} \end{bmatrix}.$$

b) Matriisin $\mathbf{A}$ kertominen oikealta $n \times n$ -diagonaalimatriisilla $\mathbf{D}_o = \lceil d_1 \ldots d_n \rfloor$ tuottaa matriisin, jonka *i. sarake* on kerrottu d_i:llä:

$$\mathbf{A}\mathbf{D}_o = [d_1 \mathbf{a}_{(1)} \cdots d_n \mathbf{a}_{(n)}].$$

Vastaus.[2]

$$\underset{m\times n}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{(1)} & \cdots & \mathbf{a}_{(n)} \end{bmatrix}, \ \underset{m\times m}{\mathbf{D}_v} = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & d_m \end{bmatrix},$$

$$\underset{n\times n}{\mathbf{D}_o} = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}.$$

a)

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_v\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & d_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & d_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_1a_{11} & \cdots & d_1a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_ma_{m1} & \cdots & d_ma_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1\mathbf{a}_1' \\ \vdots \\ d_m\mathbf{a}_m' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{D}_o &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1a_{11} & \cdots & d_na_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_1a_{m1} & \cdots & d_na_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_1\mathbf{a}_{(1)} & \cdots & d_n\mathbf{a}_{(n)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

[2] Vastaus on oleellisesti Jarkko Miettisen laatima.

STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Lohkodiagonaalisten matriisien determinantti

Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix},$$

lohkodiagonaalinen $n\times n$ -matriisi, jossa $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$ ja $\mathbf{A}_{22}$ ovat $m\times m$, $m\times(n-m)$ ja $(n-m)\times(n-m)$ -matriiseja $(1 \leq m < n)$. Todistetaan[3], että

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_{11}| \times |\mathbf{A}_{22}|.$$

Kirjoitetaan matriisi $\mathbf{A}$ muodossa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_{m\times(n-m)} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Matriisitulon determinantin laskusäännöstä seuraa, että

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_{m\times(n-m)} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{I}_{n-m} \end{vmatrix}.$$

Matriisin $\mathbf{B}$ $(n\times n)$ determinantti voidaan laskea (esimerkiksi) kehitettämällä se matriisin k. rivin suhteen:

$$|\mathbf{B}| = \sum_{i=j}^{n} (-1)^{k+j} b_{kj} M_{kj}.$$

Yllä b_{kj} on k,j-elementti matriisissa $\mathbf{B}$ ja M_{kj} on determinantti alimatriisista $((n-1)\times(n-1))$, joka on saatu poistamalla matriisista $\mathbf{B}$ sen k. rivi ja j. sarake.

Yhtälön (1) oikealla puolella ensimmäisenä olevan matriisin determinantin laskemista helpottaa, että sen m:llä ensimmäisellä rivillä on vain yksi nollasta poikkeava termi. Kyseinen determinantti saadaan kehittämällä determinantti ensin 1. rivin suhteen, syntyvän alimatriisin determinantti edelleen 1. rivin suhteen ja jatkamalla näin m kertaa:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_{m\times(n-m)} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times \cdots \times (-1)^{1+1} \times |\mathbf{A}_{22}| = |\mathbf{A}_{22}|$$

($(-1)^{1+1}$:siä kerrotaan m kappaletta). Kehittämällä yhtälön (1) oikealla puolella toisena olevan matriisin determinantti vastaavasti viimeiseltä riviltä alkaen saadaan

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{I}_{n-m} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times \cdots \times (-1)^{1+1} \times |\mathbf{A}_{11}| = |\mathbf{A}_{11}|$$

[3] Todistus on oleellisesti Timo Patovaaran opetusmonisteesta (1982) Matriisilaskentaa tilastotieteilijöille, Helsingin yliopiston tilastotieteen laitoksen opetusmonsteita no. 5 (s. 34)

($(-1)^{1+1}$:siä kerrotaan $n-m$ kappaletta). Näin ollen

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}_{11}| \times |\mathbf{A}_{22}|.$$

Vastaavasti voidaan osoittaa, että

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}_{m\times(n-m)} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}_{11}| \times |\mathbf{A}_{22}| = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix},$$

jossa $\mathbf{A}_{21}$ on $(n-m)\times m$ -matriisi.

STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Matriiseista ja derivoinnista

Olkoon $\mathbf{y}(\boldsymbol{\beta})$ $k \times 1$ -vektori, jonka argumentti $\boldsymbol{\beta}$ on $n \times 1$ -vektori. Tällöin

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\beta}'} \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial \beta_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial \beta_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_k}{\partial \beta_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_k}{\partial \beta_n} \end{bmatrix},$$

joka on $k \times n$ -matriisi ja jossa on merkintöjen yksinkertaistamiseksi häivytetty $\mathbf{y}(\boldsymbol{\beta})$:n riippuvuus $\boldsymbol{\beta}$:stä. Yllä olevan matriisin transpoosi on $n \times k$ -matriisi

$$\frac{\partial \mathbf{y}'}{\partial \boldsymbol{\beta}} \equiv \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\beta}'} \right)' = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial \beta_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_k}{\partial \beta_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial \beta_n} & \cdots & \dfrac{\partial y_k}{\partial \beta_n} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Olkoot $\mathbf{a} = [a_1 \ldots a_n]'$, $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \ldots \beta_n]'$ ja $n \times n$ -matriisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{(1)} & \cdots & \mathbf{a}_{(n)} \end{bmatrix},$$

jossa $\mathbf{A}_i$ ja $\mathbf{a}_{(i)}$ ovat $1 \times n$ ja $n \times 1$-vektoreita ($i = 1, \ldots, n$). Matriisin $\mathbf{A}$ i, j:nnettä elementtiä merkitään a_{ij}:llä.

Näitä merkintöjä käyttäen on helppo johtaa derivointisäännöt

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}'} \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}'} \boldsymbol{\beta}'\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}'} \sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \mathbf{a}',$$

$$\frac{\partial (\mathbf{A}\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}'} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}'} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1\boldsymbol{\beta} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}'} \mathbf{A}_1\boldsymbol{\beta} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}'} \mathbf{A}_n\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

ja

$$\frac{\partial (\boldsymbol{\beta}'\mathbf{A}')}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}'$$

(kaavan (2) perusteella). Neliömuodon $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}$ osittaisderivaatat voidaan johtaa esimerkiksi seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{A}\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\beta_1}\boldsymbol{\beta}'\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial\beta_n}\boldsymbol{\beta}'\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\beta_1}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}\beta_i\beta_j \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial\beta_n}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}\beta_i\beta_j \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}\beta_j + \sum_{i=1}^n a_{i1}\beta_i \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}\beta_j + \sum_{i=1}^n a_{in}\beta_i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1\boldsymbol{\beta} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{a}'_{(1)}\boldsymbol{\beta} \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_{(n)}\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} \\
&= (\mathbf{A}+\mathbf{A}')\boldsymbol{\beta}.
\end{aligned}$$

Kaavasta (2) seuraa, että

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{A}\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}'} &= \boldsymbol{\beta}'(\mathbf{A}+\mathbf{A}')' \\
&= \boldsymbol{\beta}'(\mathbf{A}+\mathbf{A}').
\end{aligned}$$

STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Taylor-approksimaatioita

Funktion $f(x)$ ensimmäisen ja toiseen asteen Taylor-approksimaatiot pisteessä x_0 ovat

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ja

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Tässä $f(x_0)$ on funktion $f(x)$ arvo pisteessä x_0, $f'(x_0)$ ja $f''(x_0)$ ovat funktion $f(x)$ 1. ja 2. kertaluvun derivaatat pisteessä x_0 (olettaen, että funktio on jatkuvasti derivoituva pisteessä x_0).

Kahden muuttujan tilanteessa vastaavat approksimaatiot ovat

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

ja

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0)\right. \\ &= \qquad \left. + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2\right] \end{aligned}$$

Yllä $f(x_0, y_0)$ on funktion $f(x, y)$ arvo pisteessä (x_0, y_0), $\partial f(x_0, y_0)/\partial x$ on funktion $f(x, y)$ 1. kertaluvun osittaisderivaatta muuttujan x suhteen pisteessä (x_0, y_0), $\partial^2 f(x_0, y_0)/\partial x^2$ on funktion $f(x, y)$ 2. kertaluvun osittaisderivaatta muuttujan x:n suhteen pisteessä (x_0, y_0) ja niin edelleen.

Vastaavat approksimaatiot n:n muuttujan tilanteessa ovat

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

ja

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)' \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Edellä $f(\mathbf{x}_0)$ on funktion $f(\mathbf{x})$ arvo pisteessä $\mathbf{x}_0$ ja $\partial f(\mathbf{x}_0)/\partial \mathbf{x}$ ja $\partial^2 f(\mathbf{x}_0)/\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}'$ ovat funktion $f(\mathbf{x})$ 1. ja 2. kertaluvun osittaisderivaatoista koostuva vektori $(n \times 1)$ ja matriisi $(n \times n)$ pisteessä $\mathbf{x}_0$.