STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitusten 12 vastaukset (7.12.)

1.

a) Alla olevaan taulukkoon on laskettu jakaumiin $\mathsf{N}(0, 1-\phi^2)$ ja $\mathsf{N}(\phi, (1-\phi^2)/T)$ liittyvät varianssit sekä poimittu Dentin ja Minin taulukosta 1 SU- ja PNS-estimaattoreiden vastaavat empiiriset (simuloidut) pienotosvarianssit ($T = 100$):

ϕ	**as.var.**	**teor.var.**	**SUE:n emp.var.**	**PNSE:n emp.var.**
-0.9	$0,19$	$0,0019$	$0,0017$	$0,0018$
$-0,7$	$0,51$	$0,0051$	$0,0067$	$0,0068$
$-0,5$	$0,75$	$0,0075$	$0,0068$	$0,0069$
$0,1$	$0,99$	$0,0099$	$0,0092$	$0,0094$
$0,5$	$0,75$	$0,0075$	$0,0089$	$0,0091$
$0,7$	$0,51$	$0,0051$	$0,0053$	$0,0054$
$0,9$	$0,19$	$0,0019$	$0,0032$	$0,0033$

Huomioita:

- Asymptoottinen varianssi on sitä pienempi mitä lähempänä $|\phi|$ on yhtä eli mitä autokorreloituneempi prosessi on.
- SU- ja PNS-estimaattoreiden empiiriset varianssit ovat lähes samat. Johdonmukaisesti SU-estimaattorin varianssi on kuitenkin hieman pienempi.
- Empiiriset varianssit voivat olla pienempiä tai suurempia kuin teoreettiset (asymptoottisen teorian mukaiset).
- Itseisarvoltaan pienillä ϕ:n arvoilla empiiriset varianssit ovat kohtuullisen lähellä teoreettisia. Suurilla ϕ:n arvoilla ($\phi = 0,9$) empiiriset varianssit ovat selvästi suurempia kuin teoreettiset. Asymptoottinen teoria ei toimi hyvin pienillä havaintomäärillä, kun ϕ on lähellä yhtä.

b) Alla olevaan taulukkoon on laskettu jakaumiin $\mathsf{N}(0, 1-\theta^2)$ ja $\mathsf{N}(\theta, (1-\theta^2)/T)$ liittyvät varianssit sekä poimittu Dentin ja Minin taulukosta 4 vastaavat

SU- ja PNS-estimaattoreiden empiiriset pienotosvarianssit ($T = 100$):

$\boldsymbol{\theta}$	**as.var.**	**teor.var.**	**SUE:n emp.var.**	**PNSE:n emp.var.**
$-0,95$	$0,10$	$0,0010$	$0,0010$	$0,0010$
$-0,7$	$0,51$	$0,0051$	$0,0081$	$0,0085$
$-0,5$	$0,75$	$0,0075$	$0,0110$	$0,0114$
$0,1$	$0,99$	$0,0099$	$0,0084$	$0,0085$
$0,5$	$0,75$	$0,0075$	$0,0072$	$0,0075$
$0,7$	$0,51$	$0,0051$	$0,0060$	$0,0065$
$0,95$	$0,10$	$0,0010$	$0,0017$	$0,0017$

Huomioita:

- Asymptoottinen varianssi on sitä pienempi mitä lähempänä $|\theta|$ on yhtä eli mitä autokorreloituneempi prosessi on. Varianssit riippuvat θ:n suuruudesta täsmälleen samalla tavalla kuin AR(1)-mallin tilanteessa ϕ:n suuruudesta.

- SU-estimaattorin varianssi on jonkin verran pienempi kuin PNS-estimaattorin.

- Empiiriset varianssit voivat olla pienempiä tai suurempia kuin teoreettiset (asymptoottisen teorian mukaiset). Jos θ on suuri ($\theta = 0,95$) on empiirinen varianssi huomattavasti suurempi kuin teoreettinen, eli asymptoottinen teoria ei toimi hyvin, jos θ on lähellä yhtä. Ero ei vaikuta kuitenkaan yhtä suurelta kuin AR(1)-mallin kohdalla suurilla ϕ:n arvoilla.

Todetaan lisäksi, että empiirinen ja teoreettinen varianssi eivät suhteellisesti poikkea (numeerisesti yhtäsuurilla parametrien arvoilla $\phi = \theta$) kummankaan mallin kohdalla systemaattisesti siten, että asymptoottinen teoria toimisi toisen mallin kohdalla paremmin kuin toisen.

2.

a) Perustellaan ensin vihje. Sen mukaan

$$\sum_{i=0}^{t-1} \phi^i = \frac{1-\phi^t}{1-\phi}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} 1-\phi^t &= (1-\phi)\textstyle\sum_{i=0}^{t-1}\phi^i \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{t-1}\phi^i - \sum_{i=0}^{t-1}\phi^{i+1} \\ &= \phi^0 - \phi^t \\ &= 1-\phi^t. \end{aligned}$$

Vihje siis pitää paikkansa.

HT 6.5:n mukaan $y_t = \sum_{i=1}^{t} \phi^{t-i}\varepsilon_i + \phi^t y_0$, kun vakio on nolla. Jos prosessissa on vakio (yhtälö (1)), niin — aivan samalla tavalla kuin HT 6.5:ssa — rekursiivisesti sijoittamalla saadaan

$$
\begin{aligned}
y_t &= c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= c + \phi(c + \phi y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\
&= c(1+\phi) + \phi^2(c + \phi y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} \\
& \quad c(1+\phi+\phi^2) + \phi^3(c + \phi y_{t-4} + \varepsilon_{t-3}) + \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} \\
&= \vdots \\
&= c\sum_{i=0}^{t-1} \phi^i + \phi^t y_0 + \sum_{i=1}^{t} \phi^{t-i}\varepsilon_i \\
&\overset{\text{vihje}}{=} c\frac{1-\phi^t}{1-\phi} + \phi^t y_0 + \sum_{i=1}^{t} \phi^{t-i}\varepsilon_i \\
&\overset{y_0=0}{=} c\frac{1-\phi^t}{1-\phi} + \sum_{i=1}^{t} \phi^{t-i}\varepsilon_i .
\end{aligned}
$$

b)

$$
-\frac{\partial^2 l(c,\phi)}{\partial c \partial \phi} = -\frac{\partial}{\partial c}\left[\frac{\partial l(c,\phi)}{\partial \phi}\right] \overset{\text{HT 1 \& } \sigma=1}{=} -\frac{\partial}{\partial c}\left[\sum_{t=1}^{T}(y_t - c - \phi y_{t-1})(y_{t-1})\right] = \sum_{t=1}^{T} y_{t-1}.
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[-T^{-1}\frac{\partial^2 l(c,\phi)}{\partial c\partial\phi}\right] &\overset{\text{HT 1.1}}{=} \mathsf{E}\left(T^{-1}\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}\right) \\
&\overset{y_0=0}{=} T^{-1}\mathsf{E}\left(\sum_{t=1}^{T-1} y_t\right) \\
&\overset{\text{HT 1.2a}}{=} T^{-1}\mathsf{E}\left[\sum_{t=1}^{T-1}\left(c\frac{1-\phi^t}{1-\phi} + \sum_{t=1}^{t} \phi^{t-i}\varepsilon_i\right)\right] \\
&= T^{-1}\frac{c}{1-\phi}\sum_{t=1}^{T-1}(1-\phi^t) \\
&= T^{-1}\frac{c}{1-\phi}\left(T-1-\sum_{t=1}^{T-1}\phi^t\right) \\
&= T^{-1}\frac{c}{1-\phi}\left[T-1-\left(\sum_{t=0}^{T-1}\phi^t - 1\right)\right] \\
&\overset{\text{vihje}}{=} T^{-1}\frac{c}{1-\phi}\left(T - \frac{1-\phi^T}{1-\phi}\right) \\
&= \frac{c}{1-\phi}\left(1 - T^{-1}\frac{1-\phi^T}{1-\phi}\right) \\
&\xrightarrow{T\to\infty} \frac{c}{1-\phi}.
\end{aligned}
$$

3. Johdattelua/perustelua tehtävälle: Käänteismatriisi $\mathcal{I}(c,\phi)$:lle on (2×2 -matriisin käänteismatriisin kaava on s:lla 728):

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(c,\phi)^{-1} &= \left[\frac{1}{1-\phi^2} + \frac{c^2}{(1-\phi)^2} - \left(\frac{c}{1-\phi}\right)^2\right]^{-1} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-\phi^2} + \dfrac{c^2}{(1-\phi)^2} & -\dfrac{c}{1-\phi} \\ -\dfrac{c}{1-\phi} & 1 \end{bmatrix} \\
&= (1-\phi^2) \times \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-\phi^2} + \dfrac{c^2}{(1-\phi)^2} & -\dfrac{c}{1-\phi} \\ -\dfrac{c}{1-\phi} & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{c^2(1+\phi)}{1-\phi} & -c(1+\phi) \\ -c(1+\phi) & 1-\phi^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Tämä on tehtävässä esitetty matriisi.

a) Tulkinta:

- Vakion normeeratun SU-estimaattorin eli $\sqrt{T}(\hat{c} - c)$:n varianssi on $1 + c^2(1+\phi)/(1-\phi)$.
- AR-kertoimen normeeratun SU-estimaattorin eli $\sqrt{T}(\hat{\phi} - \phi)$:n varianssi on $1 - \phi^2$.
- Estimaattoreiden kovarianssi on $-c(1+\phi)$. Intuitiota: AR(1)-prosessin odotusarvo on $c/(1-\phi)$, joten prosessi "elää" "kaukana" nollasta, mikäli $|c|$ on "suuri" tai ϕ "lähellä" yhtä. Olkoot c ja ϕ yhtäaikaa positiivisia tai negatiivisia. Tällöin estimoitu odotusarvo voi olla "sopivan" suuruinen vaikka c olisi estimoitua itseisarvoltaan suurempi ja ϕ estimoitua itseisarvoltaan pienempi. Odotusarvon suuruuden kannalta on siten intuitiivista, että c:n ja ϕ:n SU-estimaatit korreloivat negatiivisesti.

b) Kun $c = 0$, niin

- $\sqrt{T}(\hat{c} - c)$:n varianssi on 1.
- AR-kertoimen normeeratun SU-estimaattorin eli $\sqrt{T}(\hat{\phi} - \phi)$:n varianssi on $1 - \phi^2$ (riippumaton c:stä). Varianssi on korkeintaan 1 ja lähenee nollaa, jos $|\phi| \to 1$.

- Estimaattoreiden kovarianssi on 0.

c) Termi $c^2(1+\phi)/(1-\phi)$ on positiivinen oletusten $|\phi| < 1$ ja $c \neq 0$ pätiessä. Näin ollen $\sqrt{T}(\hat{c} - c)$:n varianssi

$$1 + c^2(1+\phi)/(1-\phi)$$

kasvaa c:n itseisarvon (neliön) kasvaessa. Varianssi minimoituu ykköseen, kun $-c^2(1+\phi)/(1-\phi) \approx 0$ eli kun $\phi \approx -1$. Esimerkkinä kaksi kuvaa (joissa vakio on itseisarvoltaan yksi ja viisi): Intuitiota: Hyvin autokorreloitunut aikasarja (ϕ "suuri") voi "seikkailla" pitkään odotusarvostaan ($c/(1-\phi)$) poikkeavalla tasolla, jolloin myöskään vakion suuruus ei paljastu. Tämä ei ole "koko" intuitio, koska myös vakion c suuruus vaikuttaa varianssiin (vrt. kohta d)).

$\sqrt{T}(\hat{\phi} - \phi)$:n varianssi on edelleen $1 - \phi^2$ (riippumaton c:stä).

d) Jos $\phi = 0$, niin

- $\sqrt{T}(\hat{c} - c)$:n varianssi on $1 + c^2$, joka minimoituu ykköseen, kun $c = 0$.
- $\sqrt{T}(\hat{\phi} - \phi)$:n varianssi saa maksimiarvonsa 1, ks. a)-kohta.

e) Jos $\phi = 0$, niin havainnot ovat riippumattomia ja vakio c on prosessin odotusarvo. Tilastotieteen aineopinnoista lienee tuttua, että c:n SU-estimaattori on tällöin $\bar{y} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} y_t$. (Itse asiassa myös yo. laskujen mukaan $\hat{c}(\phi)\Big|_{\phi=0} = (\bar{y} - \phi\bar{y}_{-1})\Big|_{\phi=0} = \bar{y}$.) Kirjan HT 5.3:n mukaan $\sqrt{T}(\bar{y} - c) \sim \mathsf{N}(0,1)$ tehtävän oletusten pätiessä. AR(1)-malli estimoitaessa kohdan a) mukaan

$$\sqrt{T}(\hat{c} - c) \sim \mathsf{N}(0, [1 + c^2(1+\phi)/(1-\phi)]_{\phi=0}) \doteq \mathsf{N}(0, 1 + c^2).$$

("$\doteq$" merkitsee jakaumien yhtäpitävyyttä.) Jälkimmäisen jakauman varianssi on suurempi kuin edellisen ($1 + c^2 > 1$, jos $c \neq 0$). Näin ollen yksinkertaisempi eksplisiittisesti riippumattomat havainnot olettava malli kannattaa estimoida, jos on varmaa, että $\phi = 0$. (Jos olisi mahdollista, että $\phi \neq 0$, niin olisi perusteltua estimoida AR(1)-malli.)

SU-estimaattoreille pätee yleisesti, että mallin rajaaminen tuottaa tarkemman SU-estimaattorin. Muille estimointimenetelmille tulos ei välttämättä päde. (Esim. Henmi ja Eguchi (2004): A paradox concerning nuisance parameters and projected estimating functions. *Biometrika*, 91, 929–941.)

Vakion asymptoottinen varianssi, kun vakio on yksi

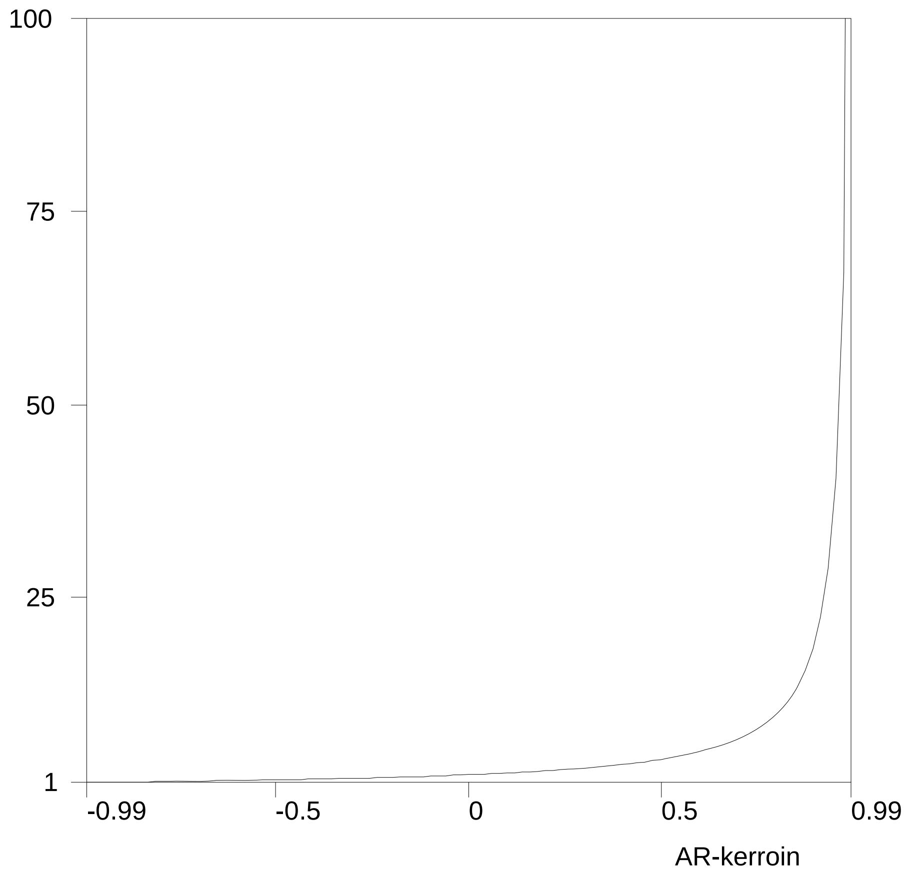

Figure 1:

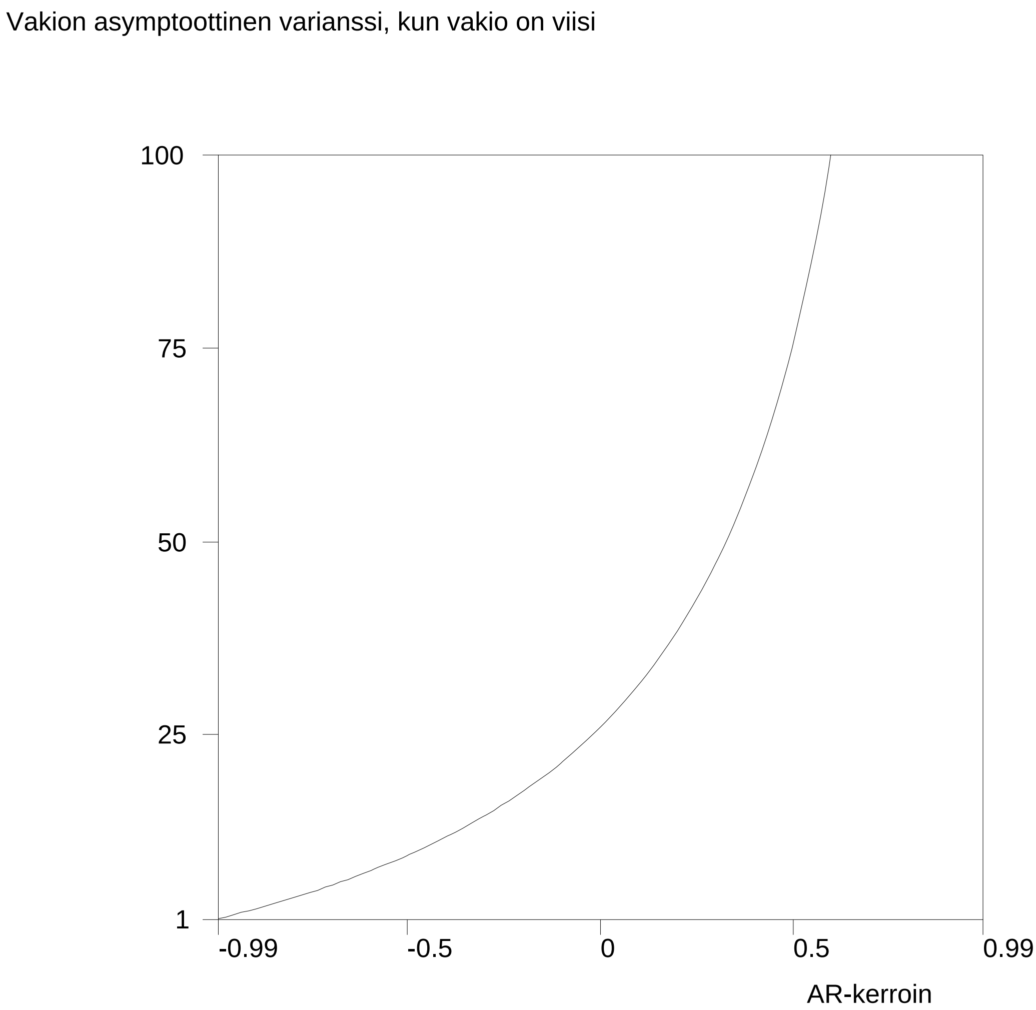
Vakion asymptoottinen varianssi, kun vakio on viisi
100
75
50
25
1
-0.99
-0.5
0
0.5
0.99
AR-kerroin

Figure 2: