STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitusten 11 vastaukset (30.11.)

1.

a) Tehtävä on hyvin samantapainen kuin HT 10.1. Otosautokorrelaatioiden ($\hat{\rho}_j$) keskivirheet voidaan laskea Millsin sivun 29 kaavalla eli Hamiltonin kaavalla [4.8.8] (ilmeisin merkinnöin):

$$\mathsf{SE}(\hat{\rho}_j) = \sqrt{\mathsf{V}(\hat{\rho}_j)} \approx \sqrt{T^{-1}(1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 \cdots + 2\rho_q^2)}, \quad j = q+1, q+2, \ldots \quad (1)$$

Kaava olettaa, että tutkittava aikasarja noudattaa MA(q)-prosessia eli että $\rho_j = 0$. Keskivirhe voidaan laskea myös olettaen, että kaikki autokorrelaatiot ovat nollia, jolloin keskivirhe olisi kaikille $\hat{\rho}_j$:ille

$$\mathsf{SE}(\hat{\rho}_j) \approx \sqrt{T^{-1}} = T^{-1/2}, \quad j = 1, 2, \ldots \quad (2)$$

Otosautokorrelaatiot ovat suurilla havaintomäärillä normaalijakautuneita, joten 95 %:n luottamusväli $\hat{\rho}_j$:lle on

$$\pm 1,96 \times \sqrt{T^{-1}(1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 \cdots + 2\rho_q^2)} \approx \pm 2 \times \sqrt{T^{-1}(1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 \cdots + 2\rho_q^2)}.$$

Kaavan mukaan 95 %:n luottamusvälit ovat

$$\begin{array}{lll} \rho_1: & \pm 2 \times \sqrt{T^{-1}} = \pm 2/\sqrt{T}, & \text{jos prosessi on MA(0)} \\ \rho_2: & \pm 2 \times \sqrt{T^{-1}(1 + 2\rho_1^2)}, & \text{jos prosessi on MA(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_k: & \pm 2 \times \sqrt{T^{-1}(1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 \cdots + 2\rho_{k-1}^2)}, & \text{jos prosessi on MA}(k-1) \end{array} \quad (3)$$

(yllä on approksimoitu standardinormaalijakauman 97,5:ttä persentiiliä $(1,96)$ 2:sella).

Kaavan $\mathsf{SE}(\hat{\rho}_j) \approx T^{-1/2}$ mukaan 95 %:n luottamusvälit ovat kaikille autokorrelaatioille

$$\rho_j: \quad \pm 2/\sqrt{T}, \quad \text{jos prosessi on MA(0)}. \quad (4)$$

Otosositasautokorrelaatioiden ($\hat{\alpha}_m^{(m)}$) keskivirheet ovat suurilla havaintomäärillä (Hamiltonin merkinnöillä s:lla 111)

$$\mathsf{SE}(\hat{\alpha}_m^{(m)}) = \sqrt{\mathsf{V}(\hat{\alpha}_m^{(m)})} \approx \sqrt{T^{-1}} = T^{-1/2}, \quad m = p+1, p+2, \ldots, \quad (5)$$

kun tutkittava aikasarja on generoitunut AR(p)-prosessista. Näin ollen osittaisautokorrelaatioiden 95 %:n luottamusvälit ovat

$$\alpha_m^{(m)}: \quad \pm 2/\sqrt{T}, \quad m = p+1, p+2, \ldots \tag{6}$$

Tehtävän tilanteessa havaintoja on 83. Otosautokorrelaatioiden keskivirheet ja vastaavat luottamusvälit ovat kaavojen (2) ja (4) mukaan

$$\mathsf{SE}(\hat{\rho}_j) \approx 83^{-1/2} \approx 0,11, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

ja

$$\rho_j: \quad \pm 2/\sqrt{83} \approx \pm 0,22. \tag{4}$$

Kaavoista (1) ja (3) keskivirheiksi ja luottamusväleiksi saataisiin seuraavat:

```
* sr1=sqrt(1/83)
* sr2=sqrt((1+2*0.71^2)/83)
* sr3=sqrt((1+2*0.71^2+2*0.53^2)/83
* sr4=sqrt((1+2*0.71^2+2*0.53^2+2*0.40^2)/83)
*
*     otosauto-          keski-      luottamus-
*     korrelaatiot       virheet     valit
* 1.  0.71               sr1=0.11    +- 2*0.11 = +- 0.22
* 2.  0.53               sr2=0.16    +- 2*0.16 = +- 0.32
* 3.  0.40               sr3=0.16    +- 2*0.16 = +- 0.32
* 4.  0.30               sr4=0.17    +- 2*0.17 = +- 0.34
```

Otososittaisautokorrelaatioiden keskivirheet ja luottamusvälit ovat kaavojen (5) ja (6) mukaan

$$\mathsf{SE}(\hat{\alpha}_m^{(m)}) \approx 83^{-1/2} \approx 0,11, \quad m = p+1, p+2, \ldots$$

ja

$$\alpha_m^{(m)}: \quad \pm 2/\sqrt{83} \approx \pm 0,22. \quad m = p+1, p+2, \ldots$$

b) AR(1). Muutosaikasarjan otosautokorrelaatiofunktio ei katkea, mikä viittaa AR- tai ARMA-prosessiin. Otosositaisautokorrelaatiofunktio katkeaa yhden viipeen jälkeen, mikä viittaa siihen, että prosessissa ei ole MA-osaa ja eritoten, että prosessi olisi AR(1). Funktioiden "katkeamiset" edellä peurstuvat autokorrelaatioiden tarkasteluun a)-kohdassa, jonka mukaan ensimmäiset otosautokorrelaatiot eivät kuulu 95 %:n luottamusvälille ja osittaisautokorrelaation kohdalla vain ensimmäinen otosositaisautokorrelaatio ei kuulu luottamusvälille.

c) AIC-kriteeri on

$$\mathsf{AIC}(p,q) = \log \overset{\wedge}{\sigma}^2 + 2(p+q)/T$$

(Mills, s. 34). Kriteeri lasketaan kullekin sovitulle mallille. AIC-kriteerin mukaan paras malli on se, joka minimoi AIC:n. Intuitio on, että kriteerissä "rangaistaan" lisäparametreista, jotka "aina" pienentävät mallin jäännösvarianssia $\overset{\wedge}{\sigma}^2$. Jäännösvarianssin tulee pienentyä enemmän kuin "rankaisutermi" $2(p+q)/T$ kasvaa. Kokeen aineiston kohdalla AIC suosittelee AR(1)-mallia.

Todetaan lisäksi, että sopivalta vaikuttavan AR(1)-mallin regressiotulostus on tällainen (Survon eikä PcGiven tulostus; niiden estimointitulokset eroavat hieman ilmeisesti koska PcGiven optimointifunktio on eri; havainnot):

$$\begin{array}{ccccccc} y_t & = & 0,004 & + & 0,712 y_{t-1} & + & \overset{\wedge}{\varepsilon}_t, \\ & & (1,082) & & (9,104) & & \end{array}$$

$$T = 83,\ \mathsf{R}^2 = 0,51,\ \sigma^2 = 0,0009$$

Estimaattien alla on niiden t–arvot ja muut merkinnät ovat ilmeiset. Todetaanpa vielä, että mallin mukaan

$$\mathsf{E}(y_t) = \frac{0,004}{1-0,712} \approx 1,014.$$

Asuntojen hinnat nousevat siis mallin mukaan keskimäärin 1,4 % neljännesvuodessa.

Aivan lopuksi tutkitaan AR(1)-mallin residuaalien mahdollista autokorreloituneisuutta Box–Ljung-testisuureella:

Viive	**Box–Ljung-testisuure**
1	(0, 167)
2	0, 231
3	0, 242
4	2, 185
5	2, 187
6	4, 159
7	4, 183
8	5, 648
9	5, 881
10	7, 254
11	14, 669
12	17, 213

Testisuure noudattaa asymptoottisesti approksimatiivisesti $\chi^2(k-p-q)$-jakaumaa (ei eksaktisti edes asymptoottisesti, jos $p+q>0$!). (Ensimmäinen luku on suluissa, koska sitä "pitäisi" verrata "$\chi^2(0)$-jakaumaan".) Lisäksi k:n pitäisi olla suuri. Testisuure lienee siis järkevintä laskea kahteentoista autokorrelaatioon perustuen. Koska $17,213$ on noin $\chi^2(12-1)$- eli $\chi^2(11)$-jakauman 90. persentiili, niin nollahypoteesi jäännösten autokorreloimattomuudesta jää voimaan tavallisella 5 prosentin riskitasolla.

2. Perustellaan ensiksi vihjeessä annetut yhtäsuuruudet:

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y}) &= \textstyle\sum_{t=1}^{T} y_t - T\bar{y} \\ &= T\bar{y} - T\bar{y} \\ &= 0\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{t=1}^{T}(y_{t-1} - \bar{y}_{-1})^2 &= \textstyle\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2 - 2\bar{y}_{-1}\sum_{t=1}^{T} y_{t-1} + T\bar{y}_{-1}^2 \\ &= \textstyle\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2 - 2T\bar{y}_{-1}^2 + T\bar{y}_{-1}^2 \\ &= \textstyle\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2 - T\bar{y}_{-1}^2.\end{aligned}$$

Derivoidaan uskottavuusfunktio [5.2.27] ($t = 1, \ldots, T$; $y_1 \to y_0$) c:n suhteen, asetetaan derivaatta nollaksi ja ratkaistaan $\hat{c}(\phi)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial l(c,\phi)}{\partial c} &\overset{5.2.27}{=} \frac{\partial}{\partial c}\left[-\frac{T}{2}\log 2\pi - \frac{T}{2}\log\sigma^2 - \textstyle\sum_{t=1}^{T}\dfrac{(y_t - c - \phi y_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right] \\ &= -\sigma^{-2}\textstyle\sum_{t=1}^{T}(y_t - c - \phi y_{t-1})(-1) = 0 \qquad \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{t=1}^{T}(y_t - c - \phi y_{t-1}) &= 0 \qquad \Leftrightarrow \\ \hat{c}(\phi) &= T^{-1}\textstyle\sum_{t=1}^{T} y_t - \phi T^{-1}\sum_{t=1}^{T} y_{t-1} \\ &= \bar{y} - \phi\bar{y}_{-1}.\end{aligned}$$

Derivoidaan uskottavuusfunktio [5.2.27] ($t = 1, \ldots, T$; $y_1 \to y_0$) ϕ:n suhteen, asetetaan derivaatta nollaksi ja ratkaistaan $\hat{\phi}(c)$:

$$\frac{\partial l(c,\phi)}{\partial \phi} \overset{\text{yltä}}{=} -\sigma^{-2}\sum_{t=1}^{T}(y_t - c - \phi y_{t-1})(-y_{t-1}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{t=1}^{T}(y_t - c - \phi y_{t-1})y_{t-1} &= 0 \qquad \Leftrightarrow \\ \hat{\phi}(c) &= \frac{\sum_{t=1}^{T}(y_t - c)y_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2}.\end{aligned}$$

Sijoittamalla $\hat{\phi}(c)$ $\hat{c}(\phi)$:n kaavaan saadaan

$$\hat{c} = \hat{c}(\hat{\phi}) = \bar{y} - \hat{\phi}\bar{y}_{-1}.$$

Vastaavasti sijoittamalla $\hat{c}(\phi)$ $\hat{\phi}(c)$:n kaavaan saadaan:

$$\begin{aligned}
\hat{\phi} = \hat{\phi}(\hat{c}) &= \frac{\sum_{t=1}^{T}[y_t - (\bar{y} - \hat{\phi}\bar{y}_{-1})]y_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2} \\
&= \frac{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})y_{t-1} - T\hat{\phi}\bar{y}_{-1}^2}{\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2} \quad \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\left[1 - \frac{T\bar{y}_{-1}^2}{\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2}\right]\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2 - T\bar{y}_{-1}^2}{\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2}\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})y_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\hat{\phi} &= \frac{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})y_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2 - T\bar{y}_{-1}^2} \\
&\overset{\text{vihje}}{=} \frac{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})(y_{t-1} - \bar{y}_{-1})}{\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2 - T\bar{y}_{-1}^2} \\
&\overset{\text{vihje}}{=} \frac{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})(y_{t-1} - \bar{y}_{-1})}{\sum_{t=1}^{T}(y_{t-1} - \bar{y}_{-1})^2}.
\end{aligned}$$

Otoskorrelaatiokerroin (r) y_t:n ja y_{t-1}:n välillä on

$$r = \frac{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})(y_{t-1} - \bar{y}_{-1})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2}\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(y_{t-1} - \bar{y}_{-1})^2}}.$$

Osoittaja on täsmälleen sama kuin $\hat{\phi}$:n osoittaja. Elleivät y_0 tai y_T ole kovin poikkeuksellisia tai T erityisen pieni pätee $\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2 \approx \sum_{t=1}^{T}(y_{t-1} - \bar{y}_{-1})^2$. Näin ollen r:n nimittäjä on noin $\hat{\phi}$:n nimittäjä. Täten $\hat{\phi} \approx r$.

3.

a) Merkitään $\boldsymbol{\beta}' = [c \quad \phi]$ ja $\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\hat{c}_{pns} \quad \hat{\phi}_{pns}]'$. Estimoitava malli on

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u},$$

jossa $\mathbf{y} =[\ y_1,\ldots,y_T]'$, $\mathbf{X}$ on $T \times 2$-matriisi, jonka ensimmäinen sarake koostuu ykkösistä ja toisen sarakkeen elementit ovat $y_0,\ldots,y_{T-1}$ ja $\mathbf{u} =[\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_T]'$. PNS-estimaattori on $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$. Näin ollen

$$\mathsf{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathsf{E}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}] = \mathsf{E}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}] = \boldsymbol{\beta} + \mathsf{E}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}].$$

Odotusarvo-operaattoria ei voida viedä viimeisen termin sisälle, koska sekä $\mathbf{X}$-matriisin että $\mathbf{u}$-vektorin termit ovat satunnaismuuttujia, jotka eivät ole toisistaan riippumattomia. $\mathbf{X}'$-matriisin toinen rivi $(y_0,\ldots,y_{T-1})$ ja $\mathbf{u}$-vektori $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_T)$ korreloivat, koska $y_t = \sum_{i=1}^{t} \phi^{t-i}\varepsilon_i + \phi^t y_0$ (HT 8.3 a). Selvästikin ylipäänsä $\mathsf{E}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}] \neq 0$, joten $\mathsf{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \neq \boldsymbol{\beta}$.

b) $\mathsf{E}(\hat{\phi}_{pns}) \approx \phi - (2\phi)/T$, kun mallissa ei ole vakiota:

$\boldsymbol{\phi}$	$\mathbf{T = 25}$	$\mathbf{T = 100}$
$-0,9$	$-0,83$	$-0,88$
$-0,33$	$-0,30$	$-0,32$
0	0	0
$0,33$	$0,30$	$0,32$
$0,9$	$0,83$	$0,88$

Kommentointia: $\hat{\phi}_{pns}$ on harhaton, kun $\phi = 0$. Kun ϕ on lähellä -1:tä tai 1:tä, on $\hat{\phi}_{pns}$ harhainen kohti nollaa. Harha on itseisarvoltaan sama riippumatta ϕ:n etumerkistä. Harha pienenee, kun havaintojen lukumäärä kasvaa.

$\mathsf{E}(\hat{\phi}_{pns}) \approx \phi - (1 + 3\phi)/T$, kun mallissa on vakio:

$\boldsymbol{\phi}$	$\mathbf{T = 25}$	$\mathbf{T = 100}$
$-0,9$	$-0,83$	$-0,88$
$-0,33$	$-0,33$	$-0,33$
0	$-0,04$	$-0,01$
$0,33$	$0,25$	$0,31$
$0,9$	$0,75$	$0,86$

Kommentointia: $\hat{\phi}_{pns}$ on harhaton, kun $\phi = -1/3$. Kun ϕ on lähellä -1:tä tai 1:tä, on $\hat{\phi}_{pns}$ harhainen kohti nollaa. Harha (sen itseisarvo) on suurempi, kun $\phi > 0$ ja se on erityisen suurta, kun ϕ on lähellä yhtä. Harha on lähellä

-1:tä samansuuruista kuin mallissa ilman vakiota. Positiivisilla ϕ:n arvoilla harha on paljon suurempaa kuin mallissa ilman vakiota. Harha pienenee, kun havaintojen lukumäärä kasvaa.

Huomautus 1: Approksimaatioiden tarkkuus heikkenee lähestyttäessä ϕ:n arvoja -1 tai 1. Approksimaatioiden tarkkuus paranee, kun havaintojen lukumäärä kasvaa.

Huomautus 2: Marriotin ja Popen tuloksen perusteella voidaan konstruoida approksimatiivisesti harhaton estimaattori ϕ:lle. Simulointikokeiden mukaan sen varianssi on suurempi kuin PNS-estimaattorin. Harhakorjatun estimaatin keskineliövirhe on pienempi tai suurempi kuin PNS-estimaattorin riippuen ϕ:n arvosta. Harhakorjattua estimaattoria ei ole käytetty paljon ekonometrisessa kirjallisuudessa. Harhan pienentämistä käsittelevä tutkimus on edelleen aktiivista.

Huomautus 3: Shaman ja Stine (1988)[1] ovat johtaneet vastaavia kaavoja PNS-estimaattorin harhalle, kun prosessi on AR(p).

[1] The Bias of Autoregressive Coefficient Estimators, Journal of the American Statistical Association, 83, 842-848.