STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitusten 10 vastaukset (23.11.)

1. Otosautokorrelaatioiden ($\hat{\rho}_j$) keskivirheet on laskettu Millsin sivun 29 kaavalla eli Hamiltonin kaavalla [4.8.8] (ilmeisin merkinnöin):

$$\mathsf{SE}(\hat{\rho}_j) = \sqrt{\mathsf{V}(\hat{\rho}_j)} \approx \sqrt{T^{-1}(1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 \cdots + 2\rho_q^2)}, \quad j = q+1, q+2, \ldots$$

(Bartlett, 1946). Kaava olettaa, että tutkittava aikasarja noudattaa MA(q)-prosessia eli että $\rho_j = 0$. Luottamusvälit alla perustuvat tähän oletukseen. Otosautokorrelaatiot ovat suurilla havaintomäärillä normaalijakautuneita, joten 95 %:n luottamusväli $\hat{\rho}_j$:lle on

$$\pm 1,96 \times \sqrt{T^{-1}(1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 \cdots + 2\rho_q^2)} \approx \pm 2 \times \sqrt{T^{-1}(1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 \cdots + 2\rho_q^2)}.$$

Kaavan mukaan 95 %:n luottamusväli olisi

$$\begin{array}{lll}
\rho_1: & \pm 2 \times \sqrt{T^{-1}} = \pm 2/\sqrt{T}, & \text{jos prosessi on MA(0)} \\
\rho_2: & \pm 2 \times \sqrt{T^{-1}(1 + 2\rho_1^2)}, & \text{jos prosessi on MA(1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\rho_k: & \pm 2 \times \sqrt{T^{-1}(1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 \cdots + 2\rho_{k-1}^2)}, & \text{jos prosessi on MA}(k-1)
\end{array}$$

(yllä on approksimoitu standardinormaalijakauman 97,5:ttä persentiiliä $(1,96)$ 2:sella.

Otososittaisautokorrelaatioiden ($\hat{\alpha}_m^{(m)}$) keskivirheet ovat suurilla havaintomäärillä (Hamiltonin merkinnöillä s:lla 111)

$$\mathsf{SE}(\hat{\alpha}_m^{(m)}) = \sqrt{\mathsf{V}(\hat{\alpha}_m^{(m)})} \approx \sqrt{T^{-1}}, \quad m = p+1, p+2, \ldots,$$

kun tutkittava aikasarja on generoitunut AR(p)-prosessista.

Otosautokorrelaatiot ja luottamusvälit on laskettu yo. kaavoilla Survo-ohjelmistolla alla Millsin kirjan taulukon 2.2 tiedoista:

```
* Havaintoja on 526
*
* sr1=sqrt(1/526)
* sr2=sqrt((1+2*0.969^2)/526)
* sr3=sqrt((1+2*0.969^2+2*0.927^2)/526
* sr4=sqrt((1+2*0.969^2+2*0.927^2+2*0.884^2)/526)
```

```
*
*     otosauto-          keski-      luottamus-
*     korrelaatiot       virheet     valit
* 1.  0.969              sr1=0.044   +- 2*0.044=0.088
* 2.  0.927              sr2=0.074   +- 2*0.074=0.148
* 3.  0.884              sr3=0.093   +- 2*0.093=0.186
* 4.  0.844              sr4=0.108   +- 2*0.108=0.216
*
*     otosositttais-     keski-      luottamus-
*     autokorrelaatiot   virheet     valit
* 1.   0.969             0.044        +- 2*0.044=0.088
* 2.  -0.217               "                "
* 3.   0.011               "                "
* 4.   0.028               "                "
```

Kaikki otosautokorrelaatiot ovat luottamusvälin ulkopuolella eli ovat tilastollisesti merkitseviä. (Keskivirheet ovat varsin mutteivät aivan samoja kuin Millsin raportoimat.) Vain kaksi ensimmäistä otosositaisautokorrelaatiota ovat tilastollisesti merkitseviä. (Niiden keskivirheet täsmäävät Millsin laskemien kanssa.) ACF:n katkeamattomuus ja PACF:n katkeaminen kahden viipeen jälkeen ovat sopusoinnussa sen kanssa, että prosessi olisi AR(2) (ks. Hamiltonin s. 111 ja ennen kaikkea luennoilla jaettu summeeraus ACF:stä ja PACF:stä).

2.

Huom. Autokorrelaatiot ovat muotoa $\hat{\gamma}_j/\hat{\gamma}_0$ eli ovat osamääriä. Osamäärän odotusarvoa, kun osoittaja ja nimittäjä ovat molemmat satunnaismuuttujia, on vaikea laskea. Siksi tehtävässä tutkitaan autokovarienssien odotusarvoja.

a) $\mathsf{E}(\tilde{\gamma}_j^{\mu})$ on harhaton estimaattori kaikille j:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(\tilde{\gamma}_j^{\mu}) &= (T-j)^{-1}\textstyle\sum_{t=j+1}^{T}\mathsf{E}[(y_t-\mu)(y_{t-j}-\mu)] \\
&= (T-j)^{-1}\textstyle\sum_{t=j+1}^{T}\gamma_j \\
&= \gamma_j.
\end{aligned}$$

Sen sijaan $\mathsf{E}(\hat{\gamma}_j^{\mu}) \neq \gamma_j$ ellei y_t ole valkoista kohinaa (jolloin $\gamma_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots$) tai j ole nolla:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(\hat{\gamma}_j^{\mu}) &= T^{-1}\textstyle\sum_{t=j+1}^{T}\mathsf{E}[(y_t-\mu)(y_{t-j}-\mu)] \\
&= T^{-1}\textstyle\sum_{t=j+1}^{T}\gamma_j \\
&= \frac{T-j}{T}\gamma_j.
\end{aligned}$$

b) Tutkitaan ensin estimaattorin $\tilde{\gamma}_j$ harha, kun y_t on valkoista kohinaa ja

$j > 0$:

$$
\begin{aligned}
(T-j)\mathsf{E}(\widetilde{\gamma}_j) &= \textstyle\sum_{t=j+1}^{T} \mathsf{E}[(y_t-\bar{y})(y_{t-j}-\bar{y})] \\
&= \textstyle\sum_{t=j+1}^{T} \mathsf{E}(y_t y_{t-j}) - \sum_{t=j+1}^{T} \mathsf{E}[\bar{y}(y_t+y_{t-j})] + (T-j)\mathsf{E}(\bar{y}^2) \\
&\overset{y_t=\varepsilon_t}{=} \textstyle\sum_{t=j+1}^{T} \mathsf{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-j}) - \sum_{t=j+1}^{T} \mathsf{E}[\bar{\varepsilon}(\varepsilon_t+\varepsilon_{t-j})] + (T-j)\mathsf{E}(\bar{\varepsilon}^2) \\
&\overset{j>0}{=} 0 - T^{-1}\textstyle\sum_{t=j+1}^{T} \mathsf{E}[\sum_{i=1}^{T}\varepsilon_i(\varepsilon_t+\varepsilon_{t-j})] + \dfrac{T-j}{T^2}\mathsf{E}(\textstyle\sum_{i=1}^{T}\varepsilon_i)^2 \\
&= -T^{-1}\textstyle\sum_{t=j+1}^{T} 2\sigma^2 + \dfrac{T-j}{T^2}T\sigma^2 \\
&= -\dfrac{T-j}{T}2\sigma^2 + \dfrac{T-j}{T}\sigma^2 \\
&= -\dfrac{T-j}{T}\sigma^2 \\
&\overset{y_t=\varepsilon_t}{=} -\dfrac{T-j}{T}\gamma_0.
\end{aligned}
$$

Yllä $\varepsilon_t \sim \mathsf{WN}(0,\sigma^2)$ (valkoista kohinaa) ja $\bar{\varepsilon} = T^{-1}\sum_{i=1}^{T}\varepsilon_i$. Näin ollen

$$\mathsf{E}(\widetilde{\gamma}_j) \overset{y_t=\varepsilon_t}{=} -\gamma_0/T.$$

Koska $\gamma_0 > 0$, niin $\mathsf{E}(\widetilde{\gamma}_j) < 0$. Teoreettiset autokovarianssit ovat nollia eli $\gamma_j = 0$, kun $j > 0$. Siten $\widetilde{\gamma}_j$ on alaspäin harhainen estimaattori, kun y_t on valkoista kohinaa ja $j > 0$.

Lasketaan seuraavaksi estimaattorin $\widetilde{\gamma}_0$ harha ($j = 0$):

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(\widetilde{\gamma}_0) &= T^{-1}\textstyle\sum_{t=1}^{T} \mathsf{E}(y_t-\bar{y})^2 \\
&= T^{-1}[\textstyle\sum_{t=1}^{T} \mathsf{E}(y_t^2) - 2\sum_{t=1}^{T}\mathsf{E}(\bar{y}y_t) + T\mathsf{E}(\bar{y}^2)] \\
&\overset{y_t=\varepsilon_t}{=} T^{-1}[\textstyle\sum_{t=1}^{T} \mathsf{E}(\varepsilon_t^2) - 2\sum_{t=1}^{T}\mathsf{E}(\bar{\varepsilon}\varepsilon_t) + T\mathsf{E}(\bar{\varepsilon}^2)] \\
&= T^{-1}[T\sigma^2 - 2\textstyle\sum_{t=1}^{T}\mathsf{E}(T^{-1}\sum_{i=1}^{T}\varepsilon_i\varepsilon_t) + T\mathsf{E}(T^{-1}\sum_{i=1}^{T}\varepsilon_i)^2] \\
&= \sigma^2 - 2T^{-2}\textstyle\sum_{t=1}^{T}\sigma^2 + T^{-1}\sigma^2 \\
&= \sigma^2 - 2T^{-1}\sigma^2 + T^{-1}\sigma^2 \\
&= \sigma^2 - \sigma^2/T \\
&\overset{y_t=\varepsilon_t}{=} \gamma_0 - \gamma_0/T.
\end{aligned}
$$

Estimaattorin $\widetilde{\gamma}_0$ harha on myös muotoa $-\gamma_0/T$.

Tutkitaan seuraavaksi estimaattorin $\widehat{\gamma}_j$ harhaa, kun y_t on valkoista kohinaa ja $j > 0$.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(\hat{\gamma}_j) &= T^{-1}\textstyle\sum_{t=j+1}^{T} \mathsf{E}[(y_t-\bar{y})(y_{t-j}-\bar{y})] \\
&= T^{-1}\{\textstyle\sum_{t=j+1}^{T} \mathsf{E}(y_t y_{t-j}) - \sum_{t=j+1}^{T} \mathsf{E}[\bar{y}(y_t+y_{t-j})] + (T-j)\mathsf{E}(\bar{y}^2)\} \\
&\overset{y_t=\varepsilon_t}{=} T^{-1}\{\textstyle\sum_{t=j+1}^{T} \mathsf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) - \sum_{t=j+1}^{T} \mathsf{E}[\bar{\varepsilon}(\varepsilon_t+\varepsilon_{t-j})] + (T-j)\mathsf{E}(\bar{\varepsilon}^2)\} \\
&\overset{j>0}{=} 0 + T^{-1}\{-\textstyle\sum_{t=j+1}^{T} \mathsf{E}[T^{-1}\sum_{i=1}^{T}\varepsilon_i(\varepsilon_t+\varepsilon_{t-j})] + (T-j)\mathsf{E}(T^{-1}\sum_{i=1}^{T}\varepsilon_i)^2\} \\
&= T^{-1}(-\textstyle\sum_{t=j+1}^{T} T^{-1}2\sigma^2 + \dfrac{T-j}{T^2}T\sigma^2) \\
&= -\frac{T-j}{T^2}2\sigma^2 + \frac{T-j}{T^2}\sigma^2 \\
&= -\frac{T-j}{T^2}\sigma^2 \\
&\overset{y_t=\varepsilon_t}{=} -(1-j/T)\gamma_0/T.
\end{aligned}
$$

Koska $\gamma_0 > 0$ ja $(1-j/T) > 0$ ($0 < j < T$!), niin $\mathsf{E}(\hat{\gamma}_j) < 0$. $\hat{\gamma}_j$ on siis harhainen estimaattori ($\gamma_j = 0$, $j > 0$).

Verrataan estimaattorin $\hat{\gamma}_j$ harhaa $-(1-j/T)\gamma_0/T$ estimaattorin $\tilde{\gamma}_j$ harhaan $-\gamma_0/T$:

$$
\begin{aligned}
-(1-j/T)\gamma_0/T &= -\gamma_0/T + j\gamma_0/T^2 \\
&> -\gamma_0/T.
\end{aligned}
$$

$\hat{\gamma}_j$ on harhattomampi estimaattori kuin $\tilde{\gamma}_j$, kun $j > 0$. Molemmat estimaattorit ovat asymptoottisesti harhattomia, kun $j > 0$.

Kun $j = 0$, on $\hat{\gamma}_j$ sama estimaattori kuin $\tilde{\gamma}_j$, joten edeltä saadaan $\mathsf{E}(\hat{\gamma}_0) = \mathsf{E}(\tilde{\gamma}_0) = -\gamma_0/T$. Molemmat estimaattorit ovat siis tällöin samanverran alaspäin harhaisia. Tällöinkin molemmat estimaattorit ovat asymptoottisesti harhattomia.

Tehtävän tulokset ovat Priestleyn (1981) mukaan Kendallin (1966) havaintoja (tähän ne on poimittu Percivalin (1993) artikkelista).

Huom. Jenkins ja Watts (1969, Spectral Analysis and Its Applications, s. 184) arvelevat, että $\hat{\gamma}_j$ on yleisesti keskineliövirheen mielessä tarkempi estimaattori kuin $\tilde{\gamma}_j$. Priestleyn (1981) mukaan näin ”sanotaan” olevan ja Fullerin (1976, Introduction to Statistical Time Series, s. 236) mukaan $\hat{\gamma}_j$ on keskineliövirheen mielessä tarkempi estimaattori kuin $\tilde{\gamma}_j$ ”tietyntyyppisille” prosesseille. (Fuller raportoi myös yleiset kaavat $\hat{\gamma}_j$:n varianssille.)

3.

a) Tarkastellaan $T \times T$ -matriisia

$$\begin{bmatrix} (y_1-\bar{y})^2 & (y_1-\bar{y})(y_2-\bar{y}) & \cdots & (y_1-\bar{y})(y_T-\bar{y}) \\ (y_2-\bar{y})(y_1-\bar{y}) & (y_2-\bar{y})^2 & & \\ \vdots & & & \vdots \\ (y_T-\bar{y})(y_1-\bar{y}) & & \cdots & (y_T-\bar{y})^2 \end{bmatrix}.$$

Diagonaalitermien summa on $\sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y})^2 = T\hat{\gamma}_0$. Diagonaalitermien vasemmalla vieressä olevien termien summa on $\sum_{t=2}^{T}(y_t-\bar{y})(y_{t-1}-\bar{y}) = T\hat{\gamma}_1$. Matriisi on symmetrinen, joten myös viereisten oikean puoleisten termien summa on $T\hat{\gamma}_1$. Yleisemmin kunkin j. ala- tai ylädiagonaalin summa on $\sum_{t=j+1}^{T}(y_t-\bar{y})(y_{t-j}-\bar{y}) = T\hat{\gamma}_j$. Näin ollen matriisin kaikkien termien summa on $T\sum_{j=-(T-1)}^{T-1}\hat{\gamma}_j$. Toisaalta matriisin i. vaakarivin termien summa on $\sum_{t=1}^{T}(y_i-\bar{y})(y_t-\bar{y}) = (y_i-\bar{y})\sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y}) = 0$. Matriisin kaikkien rivien termien eli kaikkien termien summa on siten nolla. Näin ollen

$$\begin{aligned} T\sum_{j=-(T-1)}^{T-1}\hat{\gamma}_j &= 0 && \Leftrightarrow \\ \hat{\gamma}_0 &= -2\sum_{j=1}^{T-1}\hat{\gamma}_j && \Leftrightarrow \\ \hat{\rho}_0(=1) &= -2\sum_{j=1}^{T-1}\hat{\rho}_j && \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^{T-1}\hat{\rho}_j &= -\frac{1}{2} < 0. \end{aligned}$$

b) Positiivisten otosautokorrelaatioiden vastapainona on summa negatiivisia otosautokorrelaatioita a)-kohdan mukaan. Näin ollen kaikki otosautokorrelaatiot eivät voi olla positiivisia vaikka kaikki teoreettiset autokorrelaatiot olisivatkin positiivisia!

c) Ensimmäiset autokorrelaatiot ovat suuria, koska lähekkäin olevat havainnot poikkeavat (aproksimatiivisen) lineaarisen trendin takia samaan suuntaan aineiston keskiarvosta. Kaukaiset autokorrelaatiot ovat negatiivisia, koska (approksimatiivisen) lineaarisen trendin takia ne poikkeavat eri suuntaan keskiarvosta. (Esim. nousevan lineaarisen trendin tilanteessa aineiston loppupäässä on suuria havaintoja ja alkupäässä pieniä, ja näitä verrataan aineiston keskiarvoon.)

Tehtävän a)-kohdan mukaan $\sum_{j=1}^{T-1}\hat{\rho}_j < 0$. Tehtävän tilanteessa ensimmäiset autokorrelaatiot ovat väistämättä positiivisia. Kuviosta käy selvästi ilmi, kuinka näitä positiivisia otosautokorrelaatioita vastaa (summaltaan suurempi) joukko negatiivisia otosautokorrelaatioita.

4.

a) Havaintoja on parillinen määrä, joten $\bar{y} = 0$. Näin ollen $\hat{\rho}_1$:n osoittaja on

$$\sum_{t=2}^{T} y_t y_{t-1} = \sum_{t=2}^{T} -a^2 = -(T-1)a^2,$$

nimittäjä on

$$\sum_{t=1}^{T} y_t^2 = Ta^2$$

ja $\hat{\rho}_1$ on

$$\hat{\rho}_1 = \frac{-(T-1)a^2}{Ta^2} = \frac{-(T-1)}{T} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} -1.$$

Lasketaan $\hat{\rho}_2$. Sen osoittaja on

$$\sum_{t=3}^{T} y_t y_{t-2} = \sum_{t=3}^{T} a^2 = (T-2)a^2.$$

Nimittäjä on sama kuin edellä. 2. otosautokorrelaatio on

$$\hat{\rho}_2 = \frac{(T-2)a^2}{Ta^2} = \frac{T-2}{T} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

"Yksinkertainen" kaava otosautokorrelaatioille ($\hat{\rho}_j$) tuottaa odotetun tuloksen vain asymptoottisesti.

Tavanomainen korrelaatiokerroin antaisi odotetut tulokset: Lasketaan $\hat{\rho}_1^*$. Keskiarvot ovat

$$\bar{y}_1 = (T-1)^{-1} \sum_{t=2}^{T} y_t = (T-1)^{-1}[(\frac{T}{2} - 1) - \frac{T}{2}]a = \frac{-a}{T-1}$$

ja

$$\bar{y}_{-1} = (T-1)^{-1} \sum_{t=1}^{T-1} y_t = (T-1)^{-1}[\frac{T}{2} - (\frac{T}{2} - 1)]a = \frac{a}{T-1}.$$

$\overset{\wedge}{\rho}{}_1^*$:n osoittaja on

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{t=2}^T(y_t-\bar{y}_1)(y_{t-1}-\bar{y}_{-1}) &\overset{\text{yltä}}{=} \textstyle\sum_{t=2}^T(y_t-\frac{-a}{T-1})(y_{t-1}-\frac{a}{T-1})\\
&= \textstyle\sum_{t=2}^T y_ty_{t-1}-\sum_{t=2}^T\frac{a}{T-1}y_t+\sum_{t=2}^T\frac{a}{T-1}y_{t-1}-\frac{a^2}{T-1}\\
&= -(T-1)a^2-\frac{a}{T-1}(-a)+\frac{a}{T-1}a-\frac{a^2}{T-1}\\
&= [-(T-1)+\frac{1}{T-1}]a^2\\
&= \frac{1-(T-1)^2}{T-1}a^2\\
&= \frac{-T(T-2)}{T-1}a^2.
\end{aligned}$$

$\overset{\wedge}{\rho}{}_1^*$:n nimittäjä on

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\textstyle\sum_{t=2}^T(y_t-\bar{y}_1)^2\sum_{t=2}^T(y_{t-1}-\bar{y}_{-1})^2}\\
=&\sqrt{\textstyle\sum_{t=2}^T(y_t-\frac{-a}{T-1})^2\sum_{t=2}^T(y_{t-1}-\frac{a}{T-1})^2}\\
=&\sqrt{\textstyle\sum_{t=2}^T[y_t^2+\frac{2a}{T-1}y_t+\frac{a^2}{(T-1)^2}]\sum_{t=1}^{T-1}[y_t^2-\frac{2a}{T-1}y_t+\frac{a^2}{(T-1)^2}]}\\
=&\sqrt{[(T-1)a^2+\frac{2a}{T-1}(-a)+\frac{a^2}{T-1}][(T-1)a^2-\frac{2a}{T-1}a+\frac{a^2}{T-1}]}\\
=&\sqrt{[(T-1)a^2-\frac{a^2}{T-1}][(T-1)a^2-\frac{a^2}{T-1}]}\\
=&[(T-1)-\frac{1}{T-1}]a^2\\
\overset{\text{yltä}}{=}&\frac{T(T-2)}{T-1}a^2.
\end{aligned}$$

Saadaan, että $\overset{\wedge}{\rho}{}_1^*$ on

$$\overset{\wedge}{\rho}{}_1^*=\frac{\frac{-T(T-2)}{T-1}a^2}{\frac{T(T-2)}{T-1}a^2}=-1.$$

Otosautokorrelaation $\overset{\wedge}{\rho}_1$ lasku on helpompaa kuin $\overset{\wedge}{\rho}{}_1^*$:n mutta edellinen on vain approksimaatio jälkimmäiselle. Tehtävän tilanteessa ero on pieni, jollei T ole kovin pieni. Johtopäätös (induktiivinen!): Stationaarisia aikasarjoja tutkittaessa, T:n ollessa kohtuullisen suuri, $\overset{\wedge}{\rho}_j$ ja $\overset{\wedge}{\rho}{}_j^*$eroavat vähän, kun j on pieni. Esimerkiksi $\overset{\wedge}{\rho}_1-\overset{\wedge}{\rho}{}_1^*=T^{-1}$, joten ero tunnuslukujen välillä on $0,1$, jos $T=100$. Muulloin ne voivat erota paljon.

b) Kun $y_1 = \ldots = y_T = a$, niin $\bar{y} = a$ ja

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=j+1}^{T}(a-a)(a-a)}{\sum_{t=j+1}^{T}(a-a)^2}.$$

Osamäärä on 0/0-muotoa, joten $\hat{\rho}_1$:tä ei ole määritelty. Vastaavasti käy myös tavanomaista korrelaatiokerrointa $\hat{\rho}_1^*$:ä laskettaessa. Aineiston hajontakuvio on T päällekkäistä havaintoa pisteessä (a, a) (y_{t-1}, y_t)-koordinaatistossa. Tulkinta: Yhden pisteen kautta ei voi piirtää regressiosuoraa tai laskea korrelaatiokerrointa.

c) Selvästikin $\bar{y} = 0$. Siitä seuraa, että $\hat{\rho}_1$:n osoittaja on

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{t=2}^{T} y_t y_{t-1} &= \textstyle\sum_{t=2}^{T/2} y_t y_{t-1} + y_{T/2+1} y_{T/2} + \sum_{t=T/2+2}^{T} y_t y_{t-1} \\
&= (T/2-1)(-a)^2 + (-a)a + (T/2-1)a^2 \\
&= (T-3)a^2.
\end{aligned}$$

Nimittäjä on

$$\sum_{t=1}^{T} y_t^2 = Ta^2.$$

1. otosautokorrelaatio on

$$\hat{\rho}_1 = \frac{(T-3)a^2}{Ta^2} = \frac{T-3}{T} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Lasketaan $\hat{\rho}_1^*$. Tarvittavat keskiarvot ovat

$$\bar{y}_1 = (T-1)^{-1} \sum_{t=2}^{T} y_t = \frac{a}{T-1}$$

ja

$$\bar{y}_{-1} = (T-2)^{-1} \sum_{t=1}^{T-1} y_t = \frac{-a}{T-1}.$$

$\overset{\wedge}{\rho}{}^*_1$:n osoittaja on

$$\begin{aligned}
& \textstyle\sum_{t=2}^{T}(y_t - \bar{y}_j)(y_{t-j} - \bar{y}_{-j}) \\
= \; & \textstyle\sum_{t=2}^{T}(y_t - \dfrac{a}{T-1})(y_{t-1} + \dfrac{a}{T-1}) \\
= \; & \textstyle\sum_{t=2}^{T} y_t y_{t-1} - \dfrac{a}{T-1}\sum_{t=2}^{T} y_{t-1} + \dfrac{a}{T-1}\sum_{t=2}^{T} y_t - \sum_{t=2}^{T}\dfrac{a^2}{(T-1)^2} \\
\overset{\text{yltä}}{=} \; & (T-3)a^2 - \frac{a}{T-1}(-a) + \frac{a}{T-1}(-a) - \frac{a^2}{T-1} \\
= \; & \frac{(T-3)(T-1)+1}{T-1}a^2 \\
= \; & \frac{T^2-4T+4}{T-1}a^2 \\
= \; & \frac{(T-2)^2}{T-1}a^2.
\end{aligned}$$

Nimittäjä on

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\textstyle\sum_{t=2}^{T}(y_t - \bar{y}_j)^2 \sum_{t=2}^{T}(y_{t-j} - \bar{y}_{-j})^2} \\
= \; & \sqrt{\textstyle\sum_{t=2}^{T}(y_t - \dfrac{a}{T-1})^2 \sum_{t=2}^{T}[y_{t-1} - (\dfrac{-a}{T-1})]^2} \\
= \; & \sqrt{(\textstyle\sum_{t=2}^{T} y_t^2 - \dfrac{2a}{T-1}\sum_{t=2}^{T} y_t + \dfrac{a^2}{T-1})(\sum_{t=1}^{T-1} y_t^2 + \dfrac{2a}{T-1}\sum_{t=1}^{T-1} y_t + \dfrac{a^2}{T-1})} \\
= \; & \sqrt{[(T-1)a^2 - \frac{2a}{T-1}a + \frac{a^2}{T-1}][(T-1)a^2 + \frac{2a}{T-1}(-a) + \frac{a^2}{T-1}]} \\
= \; & (T-1)a^2 - \frac{a^2}{T-1} \\
= \; & \frac{(T-1)^2-1}{T-1}a^2 \\
= \; & \frac{T(T-2)}{T-1}a^2.
\end{aligned}$$

Näin ollen $\overset{\wedge}{\rho}{}^*_1$ on

$$\frac{\dfrac{(T-2)^2}{T-1}a^2}{\dfrac{T(T-2)}{T-1}a^2} = \frac{T-2}{T} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Aikasarjan voisi ajatella muotoutuneen niin, että siihen on tullut yksi innovaatio hetkellä $T/2+1$ ja innovaatiolla olisi pysyvä vaikutus. Autokorrelaation edellisen arvon kanssa tulisi siten olla mahdollisimman suuri eli yksi. Huomataan, että sekä $\overset{\wedge}{\rho}{}^*_1$ että $\overset{\wedge}{\rho}_1$ ovat hyvin lähellä yhtä ja että $\overset{\wedge}{\rho}{}^*_1$ on vielä lähempänä. Molemmat otosautokorrelaatiot ovat siis intuitiivisia. Hajontakuvion avulla on helppo ymmärtää, miksi $\overset{\wedge}{\rho}{}^*_1$ ei ole tasan yksi. Aineiston hajontakuvio ((y_{t-1}, y_t)-koordinaatistossa) on $T/2 - 1$ päällekkäistä havaintoa pisteessä $(-a, -a)$, $T/2 - 1$ päällekkäistä havaintoa pisteessä (a, a) ja havainto pisteessä $(-a, a)$. Ilman viimeksimainittua havaintoa korrelaatio eli $\hat{\rho}_1^*$ olisi 1. Yhden havainnon merkitys pienenee T:n kasvaessa, joten $\hat{\rho}_1^* \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Lasketaan $\hat{\rho}_{T-1}$: Sen osoittaja on

$$\sum_{t=T-1+1}^{T} y_t y_{t-(T-1)} = y_T y_1 = a \times (-a) = -a^2.$$

Nimittäjä on sama kuin edellä. Otosautokorrelaatio viipeelle $T - 1$ on

$$\hat{\rho}_{T-1} = \frac{-a^2}{Ta^2} = -T^{-1} < 0.$$

Koska ensimmäiset y_t:n havainnot ovat $-a$:n suuruisia ja viimeiset a:n, niin voisi ajatella, että otosautokorrelaation tulisi olla lähellä -1:tä. $\hat{\rho}_{T-1}$ menee kuitenkin intuition vastaisesti nollaan T:n kasvaessa!

Otosautokorrelaatioita $\hat{\rho}_j^*$ ei voida laskea, kun $j > T/2$, koska syntyisi 0/0-muotoa oleva osamäärä. Geometrinen perustelu: Aineiston hajontakuvio on $T - j$ päällekkäistä havaintoa pisteessä $(-a, a)$ (y_{t-1}, y_t)-koordinaatistossa, eikä yhdessä pisteessä sijaitseville havainnoille voi laskea korrelaatiokerrointa. Edes $\hat{\rho}_j^*$:n käyttö ei "pelasta pulasta".

Analyyttinen perustelu: Otosautokorrelaatioita $\hat{\rho}_j^*$ ei voi laskea, koska syntyisi 0/0-muotoa oleva osamäärä.