STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitusten 9 vastaukset (16.11.)

1. Väite on intuitiivisesti ilmeinen, mutta todistetaan se. Keskineliövirheen mielessä optimaalinen lineaarinen ennuste toteuttaa ehdon

$$\mathsf{E}[(Y_{t+1} - \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{X}_t)\mathbf{X}_t'] = \mathbf{0}', \tag{4.1.10}$$

jossa $\boldsymbol{\alpha}' = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$. Valitaan $\mathbf{X}_t' = [u_t\ u_{t-1}\ v_t]$ (Y_{t+1}:n ennustamisen kannalta $u_{t-2}, u_{t-3}, \ldots$ ja $v_{t-1}, v_{t-2}, \ldots$ ovat hyödyttömiä). Ehto saa muodon

$$\begin{aligned}
& \mathsf{E}\{(Y_{t+1} - \boldsymbol{\alpha}'[u_t\ u_{t-1}\ v_t]')[u_t \quad u_{t-1} \quad v_t]\} \\
= \;& \mathsf{E}\{(u_{t+1} + \delta u_t + v_{t+1} - \alpha_1 u_t - \alpha_2\ u_{t-1} - \alpha_3 v_t)[u_t \quad u_{t-1} \quad v_t]\} \\
= \;& \mathsf{E}[\delta u_t^2 - \alpha_1 u_t^2 \quad -\alpha_2\ u_{t-1}^2 \quad -\alpha_3 v_t^2] \\
= \;& [(\delta - \alpha_1)\sigma_u^2 \quad -\alpha_2\sigma_u^2 \quad -\alpha_3\sigma_v^2] \\
= \;& \mathbf{0}'.
\end{aligned}$$

Yllä toinen yhtäsuuruus seuraa innovaatioiden u_{t-i} ja v_{t-j} (kaikille i,j) korreloimattomuudesta. Koska $\sigma_u^2 \neq 0 \neq \sigma_v^2$, optimaalisen kerroinvektorin täytyy olla

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}' &= [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3] \\
&= [\delta \quad 0 \quad 0].
\end{aligned}$$

Näin ollen optimaalinen lineaarinen ennuste Y_{t+1}:lle on

$$\hat{\mathsf{E}}(y_{t+1}|u_t, u_{t-1}, v_{t-1}) = \delta u_t + 0 \times u_{t-1} + 0 \times v_t = \delta u_t.$$

2. Osoitetaan, että $\hat{\mathsf{E}}(y_{t+s}|\,\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots) = \mu + \psi_s\varepsilon_t + \psi_{s+1}\varepsilon_{t-1} + \psi_{s+2}\varepsilon_{t-2} + \cdots$ konvergoi kvadraattisesti μ:hyn. Huomataan, että

$$\mathsf{E}[(\mu + \psi_s\varepsilon_t + \psi_{s+1}\varepsilon_{t-1} + \psi_{s+2}\varepsilon_{t-2} + \cdots) - \mu]^2 = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_{s+i}^2.$$

Kertoimet ψ_j ovat oletuksen mukaan absoluuttisesti summautuvia, joten ne ovat myös kvadraattisesti summautuvia (kirjan s. 69). Näin ollen $\sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_{s+i}^2 \to 0$, kun $s \to \infty$, eli $\hat{\mathsf{E}}(y_{t+s}|\,\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots)$ konvergoi kvadraattisesti μ:hyn.

3. Osoitetaan, että $n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1} y_{t-j}$ konvergoi kvadraattisesti $\kappa^{(i)}$:hin eli että lineaarikombinaatiolla $n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1} y_{t-j}$ voidaan ennustaa $\kappa^{(i)}$:tä mielivaltaisen tarkasti. Ensin osoitetaan, että $\mathsf{E}(n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1} y_{t-j} - \kappa^{(i)})^2 = \sigma^2/n$:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(n^{-1}\textstyle\sum_{j=0}^{n-1} y_{t-j} - \kappa^{(i)})^2 &= \mathsf{E}[n^{-1}\textstyle\sum_{j=0}^{n-1}(\varepsilon_{t-j} + \kappa^{(i)}) - \kappa^{(i)}]^2 \\
&= \mathsf{E}(n^{-1}\textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_{t-j})^2 \\
&\overset{\mathsf{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-j})=0}{=} n^{-2}\textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \mathsf{E}(\varepsilon_{t-j}^2) \\
&= n^{-2}\textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \sigma^2 \\
&= \sigma^2/n.
\end{aligned}$$

Kasvattamalla n:ää saadaan σ^2/n mielivaltaisen pieneksi, eli $n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1} y_{t-j}$:llä voidaan approksimoida $\kappa^{(i)}$:tä mielivaltaisen tarkasti. $\kappa^{(i)}$ on myös korreloimaton ε_{t-s}:ien $(s = 0, 1, \ldots)$ kanssa:

$$\begin{aligned}
\mathsf{cov}(\kappa^{(i)}, \varepsilon_{t-s}) &\overset{\mathsf{E}(\varepsilon_{t-s})=0}{=} \mathsf{E}(\kappa^{(i)}\varepsilon_{t-s}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}(n^{-1}\textstyle\sum_{j=0}^{n-1} y_{t-j}\varepsilon_{t-s}) \\
&\overset{s\in[0,n-1]}{=} \lim_{n\to\infty}(n^{-1}\sigma^2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Näin ollen $\kappa^{(i)}$ on Woldin hajotelmalauseen mukainen κ_t.

Edelleen:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathsf{E}}(y_t \,|y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots) &= \hat{\mathsf{E}}(\varepsilon_t + \kappa^{(i)} \,\big|\varepsilon_{t-1} + \kappa^{(i)}, \varepsilon_{t-2} + \kappa^{(i)}, \ldots) \\
&\overset{\mathsf{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-j})=0,\ cov(\kappa^{(i)},\varepsilon_{t-j})=0}{=} \kappa^{(i)}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
y_t - \hat{\mathsf{E}}(y_t \,|y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots) &= \varepsilon_t + \kappa^{(i)} - \kappa^{(i)} \\
&= \varepsilon_t.
\end{aligned}$$

ε_t on jäännös, kun y_t:tä ennustetaan lineaarikombinaatiolla y_t:n menneitä arvoja. ε_t on oletuksen mukaan myös valkoista kohinaa. Näin ollen ε_t on Woldin hajotelmalauseen lineaarinen ei-deterministinen osa.

$y_t = \varepsilon_t + \kappa^{(i)}$ on siis Woldin lauseen mukainen hajotelma.