STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitusten 8 vastaukset (9.11.)

1.

a) Odotusarvo ja varianssi eivät välttämättä ole olemassa, jolloin niitä ei voi kuvata muuttumattomiksi kuten määritelmässä tehdään.

b) Kuvaus antaa ymmärtää, että heikko stationaarisuus seuraisi eli olisi "heikompaa" stationaarisuutta kuin tiukka stationaarisuus. Se ei pidä paikkaansa. On olemassa tiukasti stationaarisia prosesseja, jotka eivät ole heikosti stationaarisia (ja päin vastoin). Esimerkki1: IID Cauchy-jakautunut satunnaismuuttuja, jolla ei ole momentteja lainkaan. Esimerkki 2 ("klassinen"): integroitunut GARCH-prosessi (ks. Hamilton, 1994, s. 667 tai alkuperäisartikkeli D.B. Nelson (1990), *Econometric Theory*, 6, s:t 318-334).

2.

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(\zeta_t) &= \mathsf{E}(\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}) \\
&= \mathsf{E}(\varepsilon_t) + \beta\mathsf{E}(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[\zeta_t - \mathsf{E}(\zeta_t)]^2 &= \mathsf{E}(\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} - 0)^2 \\
&= \mathsf{E}(\varepsilon_t^2) + \beta^2\mathsf{E}(\varepsilon_{t-1}^2\varepsilon_{t-2}^2) + 2\beta\mathsf{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}) \\
&\overset{\perp}{=} \sigma^2 + \beta^2\mathsf{E}(\varepsilon_{t-1}^2)\mathsf{E}(\varepsilon_{t-2}^2) + 2\beta\mathsf{E}(\varepsilon_t)E(\varepsilon_{t-1})E(\varepsilon_{t-2}) \\
&= \sigma^2 + \beta^2\sigma^2\sigma^2 + 0 \\
&= \sigma^2(1 + \beta^2\sigma^2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\{[\zeta_t - \mathsf{E}(\zeta_t)][\zeta_{t-j} - \mathsf{E}(\zeta_{t-j})]\} \\
=\ & \mathsf{E}[(\zeta_t - \mu)(\zeta_{t-j} - \mu)] \\
=\ & \mathsf{E}(\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} - 0)(\varepsilon_{t-j} + \beta\varepsilon_{t-1-j}\varepsilon_{t-2-j} - 0) \\
=\ & \mathsf{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-j}) + \beta\mathsf{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1-j}\varepsilon_{t-2-j}) + \beta\mathsf{E}(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-j}) + \beta\mathsf{E}(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1-j}\varepsilon_{t-2-j}) \\
\overset{\perp}{=}\ & \mathsf{E}(\varepsilon_t)\mathsf{E}(\varepsilon_{t-j}) + \beta\mathsf{E}(\varepsilon_t)\mathsf{E}(\varepsilon_{t-1-j})\mathsf{E}(\varepsilon_{t-2-j}) + \beta\mathsf{E}(\varepsilon_{t-1})\mathsf{E}(\varepsilon_{t-2})\mathsf{E}(\varepsilon_{t-j}) \\
& +\beta^2\mathsf{E}(\varepsilon_{t-1})\mathsf{E}(\varepsilon_{t-2})\mathsf{E}(\varepsilon_{t-1-j})\mathsf{E}(\varepsilon_{t-2-j}) \\
=\ & 0.
\end{aligned}$$

Selvästikin ζ_t on valkoista kohinaa.

b)

$$\begin{aligned}
\overset{\wedge}{\zeta}_{t+1} &= \mathsf{E}(\zeta_{t+1}\,|\varepsilon_t,\,\varepsilon_{t-1},\,\ldots) \\
&= \mathsf{E}(\varepsilon_{t+1} + \beta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}\,|\varepsilon_t,\,\varepsilon_{t-1},\,\ldots) \\
&= \mathsf{E}(\varepsilon_{t+1}\,|\varepsilon_t,\,\varepsilon_{t-1},\,\ldots) + \beta\mathsf{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}\,|\varepsilon_t,\,\varepsilon_{t-1},\,\ldots) \\
&= 0 + \beta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} \\
&= \beta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1},
\end{aligned}$$

jossa on merkitty $\overset{\wedge}{\zeta}_{t+1}$:lla ζ_t:n ennustetta yhden ajanjakson eteenpäin.

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(\zeta_{t+1} - \overset{\wedge}{\zeta}_{t+1})^2 &= \mathsf{E}[(\varepsilon_{t+1} + \beta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} - \beta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}]^2 \\
&= \mathsf{E}[(\varepsilon_{t+1})^2] \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[\zeta_t - \mathsf{E}(\zeta_t)]^2 - \mathsf{E}(\overset{\wedge}{\zeta}_{t+1} - \zeta_t)^2 &= \sigma^2(1+\beta^2\sigma^2) - \sigma^2 \\
&= \beta^2\sigma^4 > 0.
\end{aligned}$$

Pystyn ennustamaan ζ_t:tä niin, että ennusteen keskineliövirhe on pienempi kuin $\mathsf{var}(\zeta_t) = m\sigma^2(1+\beta^2\sigma^2)$.

3.

Todistus induktioperiaatteella. Todistetaan väite ensin 2×2 -matriisille

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}.$$

Sen käänteismatriisiksi on helppo laskea

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{bmatrix}.$$

Siis väite pätee 2×2 -matriiseille. Osoitetaan seuraavaksi, että jos väite pätee $(n-1) \times (n-1)$ -matriisille, niin se pätee myös $n \times n$ -matriisille: Olkoon käännettävä matriisi $\mathbf{A}_n$ muotoa

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}' & 1 \end{bmatrix}$$

jossa $\mathbf{A}_{11}$ on $(n-1) \times (n-1)$ -alakolmiomatriisi, jonka diagonaalialkiot ovat ykkösiä, $\mathbf{0}$ on $(n-1) \times 1$ -nollavektori ja $\mathbf{a}'$ on $1 \times (n-1)$ -vektori. Oletetaan, että $\mathbf{A}_{11}^{-1}$ on niinikään alakolmiomatriisi, jonka diagonaalialkiot ovat ykkösiä. Matriisi $\mathbf{A}_n$ on dimensioltaan $n \times n$, ja se on selvästikin täysiasteinen eli kääntyvä. Ositettujen matriisien laskusääntöjen mukaan

$$\mathbf{A}_n^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}' & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{a}'\mathbf{A}_{11}^{-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriisi $\mathbf{A}_n^{-1}$ on väitettyä muotoa, koska oletuksen mukaan myös $\mathbf{A}_{11}^{-1}$ on. Väite seuraa nyt induktioperiaatteesta.

4.

a)

$$\begin{aligned}
\underset{n_2\times n_1}{\mathsf{E}(\widetilde{\mathbf{Y}}_2\mathbf{Y}_1')} &\overset{[4.5.26\frac{1}{2}]}{=} \mathsf{E}[(\mathbf{Y}_2-\mathbf{\Omega}_{21}\mathbf{\Omega}_{11}^{-1}\mathbf{Y}_1)\mathbf{Y}_1'] \\
&= \mathsf{E}(\mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_1)-\mathbf{\Omega}_{21}\mathbf{\Omega}_{11}^{-1}\mathsf{E}(\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_1') \\
&= \mathbf{\Omega}_{21}-\mathbf{\Omega}_{21}\mathbf{\Omega}_{11}^{-1}\mathbf{\Omega}_{11} \\
&= \mathbf{0}_{n_2\times n_1}.
\end{aligned}$$

Ylin yhtälö seuraa $\bar{\mathbf{D}}$:n lohkodiagonaalisuudesta. Viimeinen yhtälö todistaa väitteen.

b) Todistetaan, että $\mathsf{E}(\widetilde{\mathbf{Y}}\widetilde{\mathbf{Y}}')=\bar{\mathbf{D}}$, mistä seuraa väite $\mathsf{E}(\widetilde{\mathbf{Y}}_2\widetilde{\mathbf{Y}}_2')=\bar{\mathbf{D}}_{22}$:

$$\begin{aligned}
&\underset{n\times n}{\mathsf{E}(\widetilde{\mathbf{Y}}\mathbf{Y}')} \\
=\ & \mathsf{E}(\begin{bmatrix}\widetilde{\mathbf{Y}}_1\\ \widetilde{\mathbf{Y}}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{\mathbf{Y}}_1' & \widetilde{\mathbf{Y}}_2'\end{bmatrix}) \\
\overset{[4.5.26\frac{1}{2}]}{=}\ & \mathsf{E}(\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \mathbf{Y}_2-\mathbf{\Omega}_{21}\mathbf{\Omega}_{11}^{-1}\mathbf{Y}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_1' & \mathbf{Y}_2'-\mathbf{Y}_1'\mathbf{\Omega}_{11}^{-1}\mathbf{\Omega}_{12}\end{bmatrix}) \\
=\ & \begin{bmatrix}\mathbf{\Omega}_{11} & \mathbf{\Omega}_{12}-\mathbf{\Omega}_{11}\mathbf{\Omega}_{11}^{-1}\mathbf{\Omega}_{12}\\ \mathbf{\Omega}_{21}-\mathbf{\Omega}_{21}\mathbf{\Omega}_{11}^{-1}\mathbf{\Omega}_{11} & \mathbf{\Omega}_{22}-\mathbf{\Omega}_{21}\mathbf{\Omega}_{11}^{-1}\mathbf{\Omega}_{12}-\mathbf{\Omega}_{21}\mathbf{\Omega}_{11}^{-1}\mathbf{\Omega}_{12}+\mathbf{\Omega}_{21}\mathbf{\Omega}_{11}^{-1}\mathbf{\Omega}_{11}\mathbf{\Omega}_{11}^{-1}\mathbf{\Omega}_{12}\end{bmatrix} \\
=\ & \begin{bmatrix}\mathbf{\Omega}_{11} & \mathbf{0}_{n_1\times n_2}\\ \mathbf{0}_{n_2\times n_1} & \mathbf{\Omega}_{22}-\mathbf{\Omega}_{21}\mathbf{\Omega}_{11}^{-1}\mathbf{\Omega}_{12}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Yllä $n=n_1+n_2$. Johdettu matriisi on sama kuin sivulla 98 määritelty $\bar{\mathbf{D}}$, eli $\mathsf{E}(\widetilde{\mathbf{Y}}_2\widetilde{\mathbf{Y}}_2')=\bar{\mathbf{D}}_{22}$.

c) Olkoon $\mathbf{Y}^*$ $(n_3\times 1)$ satunnaismuuttujavektori. Tällöin

$$\hat{P}(\mathbf{Y}^*|\,\mathbf{Y}_1)=\hat{P}(\mathbf{Y}_3|\,\mathbf{Y}_1),$$

jos

$$\mathsf{E}[(\mathbf{Y}^*-\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{Y}_1)\mathbf{Y}_1']=\mathbf{0}_{n_3\times n_1},$$

jossa $\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{Y}_1=\hat{P}(\mathbf{Y}_3|\,\mathbf{Y}_1)$ (kaava [4.1.22]). Valitaan $\mathbf{Y}^*=\hat{P}(\mathbf{Y}_3|\,\mathbf{Y}_2,\mathbf{Y}_1)$ (ennuste on satunnaismuuttuja, koska se riippuu satunnaismuuttujista $\mathbf{Y}_1$ ja $\mathbf{Y}_2$). Saadaan:

$$\hat{P}[\hat{P}(\mathbf{Y}_3|\,\mathbf{Y}_2,\mathbf{Y}_1)|\mathbf{Y}_1]=\hat{P}(\mathbf{Y}_3|\,\mathbf{Y}_1), \tag{1}$$

jos

$$\mathsf{E}\{[(\hat{P}(\mathbf{Y}_3|\,\mathbf{Y}_2,\mathbf{Y}_1)-\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{Y}_1]\mathbf{Y}_1'\}=\mathbf{0}_{n_3\times n_1}, \tag{2}$$

jossa $\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{Y}_1 = \hat{P}(\mathbf{Y}_3|\,\mathbf{Y}_1)$. Ts. $\hat{P}(\mathbf{Y}_3|\,\mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_1)$:n ja $\hat{P}(\mathbf{Y}_3|\,\mathbf{Y}_1)$:n erotuksen pitää olla korreloimaton $\mathbf{Y}_1$:n kanssa, jotta yhtälö (1) pätisi. (Tarkennus: Hamilton käyttää sanaa "korreloimaton" viittaamaan tilanteeseen jossa kahden satunnaismuuttujan ristitulo on nolla, mikä ei ole yleisesti sama asia kuin korreloimattomuus. Katso alaviite 4 sivulla 92.)

Todetaan lisäksi, että $\hat{P}(\mathbf{Y}_3|\,\mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_1)$:n ja $\hat{P}(\mathbf{Y}_3|\,\mathbf{Y}_1)$:n erotus todellakin on korreloimaton $\mathbf{Y}_1$:n kanssa. Kaavan [4.5.27] mukaan

$$\hat{P}(\mathbf{Y}_3|\,\mathbf{Y}_1) = \boldsymbol{\Omega}_{31}\boldsymbol{\Omega}_{11}^{-1}\mathbf{Y}_1,$$

ja kaavan [4.5.30] mukaan

$$\hat{P}(\mathbf{Y}_3|\,\mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_1) = \boldsymbol{\Omega}_{31}\boldsymbol{\Omega}_{11}^{-1}\mathbf{Y}_1 + \mathbf{H}_{32}\mathbf{H}_{22}^{-1}(\mathbf{Y}_2 - \boldsymbol{\Omega}_{21}\boldsymbol{\Omega}_{11}^{-1}\mathbf{Y}_1).$$

Sijoitetaan nämä tulokset lausekkeeseen $\mathsf{E}\{[\hat{P}(\mathbf{Y}_3|\,\mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_1) - \hat{P}(\mathbf{Y}_3|\,\mathbf{Y}_1)]\mathbf{Y}_1'\}$:

$$\begin{aligned}
& \mathsf{E}\{[\boldsymbol{\Omega}_{31}\boldsymbol{\Omega}_{11}^{-1}\mathbf{Y}_1 + \mathbf{H}_{32}\mathbf{H}_{22}^{-1}(\mathbf{Y}_2 - \boldsymbol{\Omega}_{21}\boldsymbol{\Omega}_{11}^{-1}\mathbf{Y}_1) - \boldsymbol{\Omega}_{31}\boldsymbol{\Omega}_{11}^{-1}\mathbf{Y}_1]\mathbf{Y}_1'\} \\
= \ & \boldsymbol{\Omega}_{31}\boldsymbol{\Omega}_{11}^{-1}\mathsf{E}(\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_1') + \mathbf{H}_{32}\mathbf{H}_{22}^{-1}[\mathsf{E}(\mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_1') - \boldsymbol{\Omega}_{21}\boldsymbol{\Omega}_{11}^{-1}\mathsf{E}(\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_1')] - \boldsymbol{\Omega}_{31}\boldsymbol{\Omega}_{11}^{-1}\mathsf{E}(\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_1') \\
= \ & \boldsymbol{\Omega}_{31}\boldsymbol{\Omega}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Omega}_{11} + \mathbf{H}_{32}\mathbf{H}_{22}^{-1}(\boldsymbol{\Omega}_{21} - \boldsymbol{\Omega}_{21}\boldsymbol{\Omega}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Omega}_{11}) - \boldsymbol{\Omega}_{31}\boldsymbol{\Omega}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Omega}_{11} \\
= \ & \mathbf{0}_{n_3\times n_1}.
\end{aligned}$$

Saatiin väite.

5.

a) Kaavan [4.1.23] mukaan optimaalisen lineaarisen ennusteen $\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{Y}_i$ kerroinvektori, kun ehdollistava muuttuja on vakio, on

$$\underset{n_i\times 1}{\boldsymbol{\alpha}'} = \mathsf{E}(\underset{n_i\times 1}{\mathbf{Y}_i} \times 1) \times [\mathsf{E}(\underset{1\times 1}{1 \times 1})]^{-1} = \underset{n_i\times 1}{\boldsymbol{\mu}_i}$$

($\boldsymbol{\alpha}'$ on pystyvektori). Näin ollen

$$\overset{\wedge}{\mathsf{E}}(\mathbf{Y}_i|\,1) = \underset{n_i\times 1}{\boldsymbol{\alpha}'} \times \underset{1\times 1}{1} = \boldsymbol{\mu}_i,$$

kun ehdollistava informaatio on vakio.

b) Tehtävässä on kolme "muuttujavektoria": $\mathbf{Y}_1$ $(n_1 \times 1)$, $\mathbf{Y}_2$ $(n_2 \times 1)$ ja 1. Optimaalisen lineaarisen ennusteen kaava on kolmen muuttujan tilanteessa [4.5.30]. Asetetaan siinä $\mathbf{Y}_3 \to \mathbf{Y}_2$, $\mathbf{Y}_2 \to \mathbf{Y}_1$ ja $\mathbf{Y}_1 \to \mathbf{Y}_0 = 1$ (1×1). Saadaan (ehdollistavana muuttujana on vakio, joten kaavan [4.5.30] $\hat{P}$ muuttuu $\hat{E}$:ksi sivun 74 merkintöjen perusteella):

$$\overset{\wedge}{\mathsf{E}}(\mathbf{Y}_2|\,\mathbf{Y}_1, 1) = \boldsymbol{\mu}_2 1^{-1}\times 1 + \mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}(\mathbf{Y}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 \times 1^{-1} \times 1) = \boldsymbol{\mu}_2 + \mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}(\mathbf{Y}_1 - \boldsymbol{\mu}_1).$$

koska

$$\mathbf{\Omega}_{00} = \mathsf{E}(1 \times 1) = 1$$

ja

$$\mathbf{\Omega}_{i0} = \mathsf{E}(\mathbf{Y}_i \times 1) = \boldsymbol{\mu}_i,$$

jossa $i = 1, 2$. (Kaavan [4.5.30] toiselta riviltä ja a)-kohdasta seuraisi myös kysytty kaava.) $\mathbf{H}_{11}$ ja $\mathbf{H}_{21}$ ovat

$$\mathbf{H}_{11} = \mathsf{E}\{[\mathbf{Y}_1 - \hat{P}(\mathbf{Y}_1|\,1)][\mathbf{Y}_1 - \hat{P}(\mathbf{Y}_1|\,1)]'\} \overset{\text{a)-kohta}}{=} \mathsf{E}[(\mathbf{Y}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)(\mathbf{Y}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)'] = \mathbf{\Omega}_{11}^*$$

ja

$$\mathbf{H}_{21} = \mathsf{E}\{[\mathbf{Y}_2 - \hat{P}(\mathbf{Y}_2|\,1)][\mathbf{Y}_1 - \hat{P}(\mathbf{Y}_1|\,1)]'\} \overset{\text{a)-kohta}}{=} \mathsf{E}[(\mathbf{Y}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)(\mathbf{Y}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)'] = \mathbf{\Omega}_{21}^*.$$

Näin ollen

$$\hat{\mathsf{E}}(\mathbf{Y}_2|\,\mathbf{Y}_1, 1) = \boldsymbol{\mu}_2 + \mathbf{\Omega}_{21}^*(\mathbf{\Omega}_{11}^*)^{-1}(\mathbf{Y}_1 - \boldsymbol{\mu}_1).$$

Huomataan nyt, että $\mathbf{\Omega}_{ij}^*$ on $\mathbf{\Omega}_{ij}$ jakson 4.6 merkinnöillä. Kaava "[4.6.7$\frac{1}{2}$]" on todistettu.