STATIONAARISET AIKASARJAT, 10 OP. 13.9.–14.12.2012. Kirjallisuus: James Hamiltonin Time Series Analysis, luvut 1–5 ja Terence Millsin The Econometric Modelling of Financial Time Series, luku 2. Luennoi: yliopistonlehtori Pekka Pere.

Harjoitusten 7 vastaukset (2.11.)

1.

a) Kaavan [4.1.10] mukaan optimaalinen lineaarinen ennuste y_{t+1}:lle ehdollistavalla informaatiolla $\mathbf{X}_t$, eli $\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{X}_t$, toteuttaa yhtälön

$$\mathsf{E}[(y_{t+1} - \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{X}_t)\mathbf{X}_t'] = \mathbf{0}'.$$

Tehtävän tilanteessa $\mathbf{X}_t$ on y_{t+1-j}. Näin ollen α on skalaari, ja optimaalinen lineaarinen ennuste y_{t+1}:lle on muotoa αy_{t+1-j}. Sijoitetaan $\mathbf{X}_t = y_{t+1-j}$ yllä olevaan kaavaan ja ratkaistaan α:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(y_{t+1}y_{t+1-j}) - \alpha\mathsf{E}(y_{t+1-j}^2) &= 0 \qquad \Longrightarrow \\
\alpha &= \frac{\mathsf{E}(y_{t+1}y_{t+1-j})}{\mathsf{E}(y_{t+1-j}^2)},
\end{aligned}$$

jossa odotusarvot ovat vakioita stationaarisuuden perusteella. Optimaalinen lineaarinen ennuste y_{t+1}:lle, kun ehdollistava informaatio on y_{t+1-j}, on $[\mathsf{E}(y_{t+1}y_{t+1-j})/\mathsf{E}(y_{t+1-j}^2)]y_{t+1-j}$. (Vrt. lineaarinen kahden muuttujan regressio ilman vakiota.)

b) Kun y_t:n odotusarvo on nolla, on $\mathsf{E}(y_{t+1}y_{t+1-j}) = \gamma_j$ ja $\mathsf{E}(y_{t+1-j}^2) = \gamma_0$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\mathsf{E}(y_{t+1}y_{t+1-j})}{\mathsf{E}(y_{t+1-j}^2)} \\
&= \frac{\gamma_j}{\gamma_0} \\
&= \rho_j.
\end{aligned}$$

Optimaalinen ennuste on nyt siis $\rho_j y_t$. (Vrt. *i)* lineaarinen kahden muuttujan regressio vakion kanssa , jossa "β-kertoimen" estimaatti on otoskorrelaatiokerroin, ja *ii)* Hamiltonin harjoitustehtävä 4.1, jossa ehdollistetaan vakiolle ja y_{t+1}:n ensimmäiselle viipeelle).

c) Optimaalinen lineaarinen ennuste on b)-kohdan perusteella $\rho_1 y_t$. AR(2)-prosessin 1. autokorrelaatio ρ_1 on kaavan [3.4.27] (kirjan s. 58) mukaan

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}.$$

Kysytty ennuste on siis $[\phi_{1/}(1 - \phi_2)]y_t$ eli $\alpha = \phi_{1/}(1 - \phi_2)$.

2.

a) Osoitetaan odotusarvon, varianssin ja autokovarienssien vakioisuus:

$$\mathsf{E}(y_t) = \mathsf{E}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) = \mathsf{E}(\varepsilon_t) - \mathsf{E}(\varepsilon_{t-1}) = 0.$$

$$\mathsf{var}(y_t) \overset{\mathsf{E}(y_t)=0}{=} \mathsf{E}(y_t^2) = \mathsf{E}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2 = \mathsf{E}(\varepsilon_t^2) - 2\mathsf{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) + \mathsf{E}(\varepsilon_{t-1}^2) = 2\sigma^2.$$

$$\mathsf{cov}(y_t, y_{t-1}) \overset{\mathsf{E}(y_t)=0}{=} \mathsf{E}(y_t y_{t-1}) = \mathsf{E}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}) = -\mathsf{E}(\varepsilon_{t-1}^2) = -\sigma^2.$$

$$\mathsf{cov}(y_t, y_{t-j}) \overset{\mathsf{E}(y_t)=0}{=} \mathsf{E}(y_t y_{t-j}) = \mathsf{E}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-j} - \varepsilon_{t-j}) = 0.$$

Odotusarvo, varianssi ja autokovarianssit ovat vakioita, joten prosessi on heikosti stationaarinen.

b) Prosessi ei ole kääntyvä, koska $\theta = -1$ eli kääntyvyysehto $|\theta| < 1$ ei päde ($y_t = (1 + \theta L)\varepsilon_t$). Toista vastaavaa MA(1)-prosessia ei ole (tilanteet $\theta = \pm 1$ ovat rajatapauksia, kirjan s. 65).

c) Jos odotusarvoa 0 käytetään ennusteena, on ennusteen keskineliövirhe $2\sigma^2$:

$$\mathsf{E}(y_t - 0)^2 = \mathsf{E}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2 = 2\sigma^2.$$

d) Tehtävänanto on samanlainen kuin tehtävässä 7.1 b). Sen mukaan optimaalinen ennuste on $\rho_1 y_t$. Lasketaan ρ_1 tämän tehtävän prosessille. Edellä on laskettu $\gamma_1 = -\sigma^2$ ja $\gamma_0 = 2\sigma^2$. Saadaan:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \\ &= \frac{-\sigma^2}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Kysytty ennuste y_{t+1}:lle on siis $-(1/2)y_t$. Sen keskineliövirhe on:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[y_{t+1} - (-0.5y_t)]^2 &= \mathsf{E}[(\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t + 0,5(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})]^2 \\ &= \mathsf{E}[(\varepsilon_{t+1} - 0,5\varepsilon_t - 0,5\varepsilon_{t-1})]^2 \\ &= \sigma^2 + 0,25\sigma^2 + 0,25\sigma^2 \\ &= (1\tfrac{1}{2})\sigma^2. \end{aligned}$$

Ehdollistavan informaation y_t avulla saatiin ennuste, jonka keskineliövirhe on pienempi kuin pelkän odotusarvoennusteen. Intuitiivisesti: y_t:ssä on informaatiota, joka auttaa ennustamisessa.

e) Lasketaan y_{t+1}:n ennuste MA(1)-mallin perusteella. Kaavan [4.2.4] mukaan optimaalinen linearinen ennuste, kun ε_t, ε_{t-1},... tunnetaan, on

$$\hat{\mathsf{E}}(y_{t+1}\,|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots) = \mu + \psi_1\varepsilon_t + \psi_2\varepsilon_{t-1} + \cdots$$

ja sen keskineliövirhe on kaavan [4.2.6] perusteella

$$\mathsf{E}[y_{t+1} - \hat{\mathsf{E}}(y_{t+1}\,|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots)]^2 = \sigma^2,$$

kun prosessi on

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \cdots$$

Tehtävän tilanteessa $\mu = 0$, $\psi_1 = -1$ ja $\psi_i = 0$, kun $\iota > 1$. Optimaalinen lineaarinen ennuste on siis

$$\hat{\mathsf{E}}(y_{t+1}\,|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots) = -\varepsilon_t,$$

ja

$$\mathsf{E}[y_{t+1} - \hat{\mathsf{E}}(y_{t+1}\,|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})]^2 = \mathsf{E}[(\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t - (-\varepsilon_t)]^2 = \mathsf{E}[(\varepsilon_{t+1})^2] = \sigma^2$$

kuten yllä yleisemmällä tasolla todettiin. Ehdollistavan informaation ε_t ja ε_{t-1} käyttö puolittaa ennusteen keskineliövirheen verrattuna yksinkertaiseen odotusarvoennusteeseen ja pienentää keskineliövirhettä huomattavasti verrattuna pelkälle y_t:lle ehdollistettuun ennusteeseen. Intuitiivisesti: oikean mallin käyttö tuottaa parhaan ennusteen.

f) Koska prosessi ei ole kääntyvä, ei y_t:tä voi esittää (vakiokertoimisena) äärettömän pitkänä autoregressiona. Wiener–Kolmogorov -kaava ei siis ole käytettävissä. (Kirjan s. 85.) (y_t:tä voidaan kylläkin approksimoida mielivaltaisen tarkasti äärettömän pitkällä autoregressiolla, jossa on muuttuvat AR-kertoimet! Ks. Brockwell ja Davis (1991): *Time Series: Theory and Methods*, 2. laitos, HT 3.8.)

3. Empiirikko käytti kiireessä ylipäänsä huonoa approksimaatiota keskineliövirheelle. Kun prosessi on stationaarinen, ennustevirheen varianssi konvergoi ennustushorisontin k kasvaessa prosessin varianssiin eli vakioon. Ääriesimerkkinä on riippumaton valkoinen kohina, jonka ennustevirheen varianssi on vakio σ^2 kaikilla k:n arvoilla. Empiirikon käyttämä kaava $k\sigma^2$ sen sijaan kasvaa rajatta k:n kasvaessa.

Jos prosessi olisi satunnaiskulku, niin kaava olisi järkevä. Satunnaiskulkuprosessi on seuraavanlainen:

$$\begin{aligned} y_t &= y_{t-1} + \varepsilon_t. \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{t} \varepsilon_i + y_{-1}. \end{aligned}$$

(Aseta $\phi = 1$ ja $w_t = \varepsilon_t$ kirjan kaavassa [1.1.7].) Paras ennuste (keskineliövirheen mielessä) k:n ajanjakson päähän on

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+k} &= \mathsf{E}(y_{t+k} \,|\varepsilon_t, \, \varepsilon_{t-1}, \, \ldots, \varepsilon_0, \, y_{-1}\,) \\ &= y_t, \end{aligned}$$

jonka keskineliövirhe on

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(y_{t+k} - \hat{y}_{t+k})^2 &= \mathsf{E}(\textstyle\sum_{i=t+1}^{t+k} \varepsilon_i)^2 \\ &= k\sigma^2. \end{aligned}$$

Jos tehtävän prosessi olisi hyvin autokorreloitunut (esim. $y_t = 0.99y_{t-1} + \varepsilon_t$), niin silloin approksimaatio olisi kelvollinen joillakin k:n arvoilla. Tällöinkin approksimaatio on käyttökelvoton hyvin suurilla k:n arvoilla, joilla luvun 4 mukaisen ennusteen virheen varianssi konvergoi prosessin varianssiin, mutta $k\sigma^2$ kasvaa rajatta.

4. Kirjan kaavan [4.2.39] mukaan

$$\hat{Y}_{t+s|t} = \mu + \frac{\phi^s + \theta\phi^{s-1}}{1 + \theta L}(Y_t - \mu).$$

Väitteen mukaan ($s \geq 2$)

$$\hat{Y}_{t+s|t} - \mu = \phi(\hat{Y}_{t+s-1|t} - \mu)$$

eli

$$\hat{Y}_{t+s|t} - \mu - \phi(\hat{Y}_{t+s-1|t} - \mu) = 0.$$

Sijoitetaan kaavan [4.2.39] mukaiset ennusteet yo. yhtälöön:

$$\begin{aligned} & \mu + \frac{\phi^s + \theta\phi^{s-1}}{1 + \theta L}(Y_t - \mu) - \mu - \phi[\mu + \frac{\phi^{s-1} + \theta\phi^{s-2}}{1 + \theta L}(Y_t - \mu) - \mu] \\ = \; & [\frac{\phi^s + \theta\phi^{s-1}}{1 + \theta L} - \phi\frac{\phi^{s-1} + \theta\phi^{s-2}}{1 + \theta L}](Y_t - \mu) \\ = \; & 0. \end{aligned}$$

Väitetty yhtälö siis pitää paikkansa.

5. Vakuutusmatemaatikko olisi oikeassa, jos ennustettavaa aikasarjaa generoisi AR(1)-prosessi, jonka AR-kerroin (ϕ) olisi positiivinen: AR(1)-prosessin (optimaaliset lineaariset) ennusteet s:n ajanjakson päähän ovat (kaava [4.2.19])

$$\hat{\mathsf{E}}[Y_t|Y_t, Y_{t-1}, \ldots] = \mu + \phi^s(Y_t - \mu) \cdots .$$

Nämä ennusteet suppenevat monotonisesti kohti μ:tä, kun $\phi > 0$ (ja $|\phi| < 1$) .

Jos $\phi < 0$, niin ennusteura on "sahamainen" konvergoiden kohti μ:tä, joten vakuutusmatemaatikko on väärässä monotoonisuusväitteessään

AR(1)-malli ei kuitenkaan pysty tuottamaan tehtävässä kuvatunkaltaista ennusteuraa. Perustellaan, että se on mahdollinen kahden esimerkin avulla:

i) Noudattakoon heikosti stationaarinen aikasarja y_t MA(∞)-prosessia

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \psi_2\varepsilon_{t-2} + \psi_3\varepsilon_{t-3} + \psi_4\varepsilon_{t-4} + \cdots$$

sivun 77 oletuksin. Prosessin optimaalinen ennuste s:n ajanjakson päähän on kaavan [4.2.4] mukaan

$$\hat{\mathsf{E}}[Y_t|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots] = \mu + \psi_s\varepsilon_t + \psi_{s+1}\varepsilon_{t-1} + \psi_{s+2}\varepsilon_{t-2} + \psi_{s+3}\varepsilon_{t-3} + \psi_{s+4}\varepsilon_{t-4} + \cdots .$$

Tällöin sopivilla parametrien ψ_i ja innovaatioiden ε_{t-j} arvoilla voi optimaalinen ennuste käyttäytyä kuvatulla tavalla. Kun prosessi on ARMA(p,q) (jolloin yllä on sen MA(∞)-esitys), niin prosessien optimaaliset ennusteet noudattavat ennustehorisontista q eteenpäin p:n asteen differenssiyhtälöä (s. 84), joten ennusteet välttämättä suppenevat vähitellen s:n kasvaessa kohti prosessin odotusarvoa.

ii) Oletetaan ARMA(1,2)-prosessi

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2},$$

jossa $\phi = 0,5$, $\theta_1 = -0,5$, $\theta_2 = 0,5$, $y_t = 0$ ja $\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1} = 50$. Ennusteet ovat tällöin (kaava [4.2.45])

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{t+1|t} &= \hat{\mathsf{E}}[\phi Y_t + \varepsilon_{t+1} + \theta_1\varepsilon_t + \theta_2\varepsilon_{t-1}|Y_t, Y_{t-1}, \ldots] \\
&= 0,5 \times 0 - 0,5 \times 50 + 0,5 \times 50 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{t+2|t} &= \hat{\mathsf{E}}[\phi Y_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \theta_1\varepsilon_{t+1} + \theta_2\varepsilon_t|Y_t, Y_{t-1}, \ldots] \\
&= \phi\hat{Y}_{t+1|t} + \theta_2\varepsilon_t \\
&= 0,5 \times 0 + 0,5 \times 50 \\
&= 25,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{Y}_{t+3|t} &= \hat{\mathsf{E}}[\phi Y_{t+2} + \varepsilon_{t+3} + \theta_1 \varepsilon_{t+2} + \theta_2 \varepsilon_{t+1} | Y_t, Y_{t-1}, \ldots] \\
&= \phi \hat{Y}_{t+2|t} \\
&= 0,5 \times 25 \\
&= 12,5,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{Y}_{t+4|t} &= \phi \hat{Y}_{t+3|t} \\
&= 0,5 \times 12,5 \\
&= 6,25
\end{aligned}
$$

jne. Tehtävässä kuvattu ennusteura on selvästikin mahdollinen. (Esimerkki on Pekka Malon syksyltä 2004.)